Mecánica del Continuo

2016

Fluidos: parte 1

1) Considere un fluido incompresible, linealmente viscoso en una región fija del espacio R, donde se cumple:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \; en \; \partial B$$

para todo tiempo.

a- Muestre que la velocidad en que la energía es disipada en R es:

$$2\mu \int_R |\boldsymbol{D}|^2 \, dv$$

y que también puede escribirse de manera alternativa como:

$$2\mu \int_R |\boldsymbol{W}|^2 \, dv \text{ y } \mu \int_R |\omega|^2$$

Indicando que la vorticidad es la única fuente de disipación de la energía.

b- La fuerza en la región ∂R generada por el fluido, tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{Tn} &= p\boldsymbol{n} + 2\mu \boldsymbol{Wn} \\ &= p\boldsymbol{n} - \mu \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

Donde $\boldsymbol{n}$ denota al vector unitario exterior en ∂R . Determine la expresión para una porción plana de la superficie.

2) Para un fluido incompresible, linealmente viscoso, la viscosidad cinemática se expresa como:

$$\dot{\boldsymbol{v}} = -grad\left(\frac{p}{\rho} - \beta\right) + \nu \Delta \boldsymbol{v}$$

Donde β es el potencial de la fuerza conservativa volumétrica, y $\nu = {}^{\mu}/_{\rho} \geq 0$

a- Muestre que la viscosidad cinemática puede escribirse alternativamente como:

$$\dot{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega} = -grad\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2 - \beta\right) + \nu \Delta \boldsymbol{v}$$

3) Muestre que para un fluido incompresible:

$$rot\boldsymbol{\omega} = -\Delta \boldsymbol{v}$$

a- Utilice la relación anterior para demostrar la expresión alternativa de la ecuación de transporte:

$$\dot{\overline{\int_{\mathbb{C}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t).\,\boldsymbol{dx}}} = -\nu \int_{\mathbb{C}} rot\,\boldsymbol{\omega}(x,t).\,\boldsymbol{dx}$$

4) Muestre que la ecuación de transporte-vorticidad, se puede escribir como:

$$\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\omega} + \nu\Delta\boldsymbol{\omega}$$

y brinde una interpretación geométrica del término $\boldsymbol{D}\boldsymbol{\omega}$.

5) Demuestre la forma alternativa para la ecuación de transporte-vorticidad:

$$\boldsymbol{\omega} + r\acute{o}t(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}) = \nu\Delta\boldsymbol{\omega}$$

6) Definimos la enstrofía como $e = {}^{1}\!/_{2}\,|\boldsymbol{\omega}|^2$, y utilizando la ecuación de transporte - vorticidad $\dot{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{\omega} = \nu\Delta\boldsymbol{\omega}$, obtener la expresión de la ecuación de transporte-estrofía:

$$\dot{\boldsymbol{e}} = -\boldsymbol{\omega}.\boldsymbol{D}\boldsymbol{\omega} \; - \nu|grad|\boldsymbol{\omega}^2 + \nu\Delta e$$

7) Muestre que para un flujo bidimensional, la ecuación de transporte-vorticidad se reduce a la expresión:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \nu\Delta\boldsymbol{\omega}$$

8) Sea un fluido ideal:

a-Pruebe que la potencia debida a las tensiones en un fluido ideal es cero.
b- Considere el flujo de un fluido perfecto en una región R y suponga que **:**

$$\boldsymbol{v}.\boldsymbol{n} = 0 \;\; en\; \partial R$$

muestre que:

$$\overline{\int_{\boldsymbol{R}} |\boldsymbol{v}|^2}^{\,\cdot} = 0$$

¿qué significa?

9) Considere un flujo de un fluido perfecto en una región R, y suponga que:

$$\boldsymbol{\omega}.\boldsymbol{n} = 0 \qquad en\; \partial R$$

muestre que:

$$\overline{\int_{R} \boldsymbol{\omega dv}}^{\,\cdot} = 0 \quad y \qquad \overline{\int_{R} \boldsymbol{v}.\boldsymbol{\omega dv}}^{\,\cdot} = 0$$

donde , $\int_R \;\boldsymbol{\omega dv}$ y $\int_R \;\boldsymbol{v}.\boldsymbol{\omega dv}$ representan la vorticidad neta y la helicidad neta en la región R.

10) Muestre que para un fluido perfecto:

$$\overline{\boldsymbol{D}\boldsymbol{\omega}}^{\,\cdot} = -\left[gradgrad\left(\frac{p}{\rho} - \beta\right)\right]\boldsymbol{\omega}$$

donde, β es el potencial de la fuerza conservativa volumétrica.