Tercer Parcial

Problema 1. Un alambre de $0.3\,cm$ de radio y $1.5\,m$ de longitud sostiene una lámpara que pesa $98\,N$. El esfuerzo al que se ve sometido el alambre provoca una deformación de $0.02\,cm$. Hallar el módulo de Young del alambre.

Resolución.

Por definición, el módulo de Young viene dado por:

$$Y = \frac{Esfuerzo}{Deformacion\ unitaria} = \frac{\mathcal{E}}{\Delta l\ /l_0} \tag{1}$$

En este problema, se tiene una lámpara que cuelga del extremo de un alambre.

El peso de esta lampara será la fuerza que provocará la deformación del alambre, estirándolo según los datos del problema en un 0.2% de su longitud inicial. El esfuerzo al que se ve sometido el alambre será:

$$\mathcal{E} = \frac{Modulo\ de\ la\ fuerza\ peso}{Area\ transversal\ del\ alambre}$$

En nuestro caso, el área transversal A la consideramos circular, con lo cual:

$$A = \pi r^2$$

con $r = 0.003\,m^2$ (dato del problema), de donde $A = 2.8 \times 10^{-5}\,m^2$.

Juntando el valor de A con la magnitud de la fuerza peso, resulta:

$$\mathcal{E} = \frac{98N}{2.8 \times 10^{-5}\,m^2} = 3.466 \times 10^6\,N/m^2 \tag{2}$$

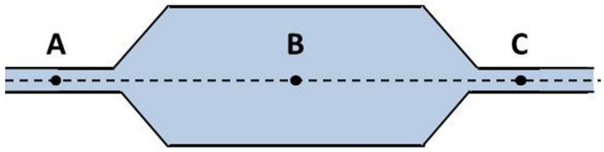
Al decirnos que en el alambre se produce una deformación $\Delta l = 0.02\,cm = 2 \times 10^{-4}\,m$, respecto de su longitud inicial $l_0 = 1.5\,m$, podemos escribir a la deformación unitaria como:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{2 \times 10^{-4}\,m}{1.5\,m} = 1.33 \times 10^{-4} \tag{3}$$

Con los resultados obtenidos en (2) y (3), volvemos a la ecuación (1):

$$\boxed{Y = 2.6 \times 10^{10}\,N/m^2}$$

Problema 2. Por una tubería circula agua (ver la imagen). La diferencia de presión entre los puntos A y B es $P_B - P_A = 500\,Pa$. Sabiendo que las secciones de los diferentes tramos de la conducción son $S_A = S_C = 10\,cm^2$ y $S_B = 20\,cm^2$, calcular las velocidades y las presiones del agua en los puntos A, B, C, de la conducción. La presión en C es la atmosférica, igual a $10^5\,Pa$.



Resolución.

Para resolver cualquier problema de hidrodinámica (o dinámica de fluidos), vamos a utilizar la relación dada por la *ecuación de continuidad*:

$$Q = S \cdot v = constante \tag{4}$$

donde Q es el caudal, que nos da una idea de la cantidad de fluido que atraviesa una sección S en un dado tiempo, con una velocidad de módulo v.

Y también usaremos la *ecuación de Bernoulli*:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = constante \tag{5}$$

que permite determinar las condiciones de un dado punto 1 ubicado a una altura h_1 de la referencia, siendo su presión igual P_1 y la rapidez del fluido en ese punto de v_1. La densidad del fluido en consideración es ρ, en este caso igual a $1000\,kg/m^3$ por tratarse de agua.

Como los tres puntos a considerar en este problema (A, B y C) se encuentran a la misma altura, se despreciará el término de $\rho g h$, considerando $h = 0$ en la posición vertical de dichos puntos.

Haciendo uso de la ecuación (5) para los puntos A y B:

$$P_A + \tfrac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \tfrac{1}{2}\rho v_B^2$$

y considerando que, por la ecuación (4):

$$S_A \cdot v_A = S_B \cdot v_B \Longrightarrow v_B = \tfrac{S_A \cdot v_A}{S_B}$$

se puede reagrupar obteniendo:

$$P_A + \tfrac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \tfrac{1}{2}\rho v_B^2$$

$$P_B - P_A = \tfrac{1}{2}\rho (v_A^2 - v_B^2)$$

$$P_B - P_A = \tfrac{1}{2}\rho \left(v_A^2 - \left(\tfrac{S_A \cdot v_A}{S_B} \right)^2 \right)$$

$$P_B - P_A = \frac{1}{2}\rho\left(1-\left(\frac{S_A}{S_B}\right)^2\right)v_A^2$$

$$\frac{2}{\rho}(P_B - P_A) = \left(1-\left(\frac{S_A}{S_B}\right)^2\right)v_A^2$$

$$v_A = \sqrt{\frac{\frac{2}{\rho}(P_B-P_A)}{\left(1-\left(\frac{S_A}{S_B}\right)^2\right)}}$$

Reemplazando $P_B - P_A$ por $500\,Pa$, S_A por 10^2 que representan $0.001\,m^2$ y S_B por $0.002\,m^2$, se obtiene:

$$\boxed{v_A = 1.15\,m/s}$$

Volviendo a utilizar la ecuación (4) de continuidad, tenemos que entonces:

$$\boxed{v_C = 1.15\,m/s}$$

y

$$\boxed{v_B = 0.575\,m/s}$$

Una vez que encontramos los valores de velocidad para los diferentes puntos de la tubería, podemos hallar las presiones que sentirá el fluido en dichos puntos. Tomando como referencia que $P_C = 10^5\,Pa$, entonces:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2$$

pero las velocidades en A y C son las mismas, con lo cual:

$$P_A = P_C \Longrightarrow \boxed{P_A = 10^5\,Pa}$$

Por otro lado:

$$P_B - P_A = 500\,Pa$$

$$P_B = 500\,Pa + P_A$$

$$P_B = 500\,Pa + 10^5\,Pa$$

$$\boxed{P_B = 1000500\,Pa}$$

Problema 3. Si se coloca una piedra de $0.1\,kg$ a $60°C$, en un calorímetro de $0.3\,kg$ de cobre, el cual contiene en su interior $1\,kg$ de agua, ambos a $35°C$, ¿cuál es la temperatura de equilibrio?

Nota: $C_{piedra} = 500\,\frac{J}{kg°C}$, $C_{cobre} = 390\,\frac{J}{kg°C}$, $C_{agua} = 4186\,\frac{J}{kg°C}$

Resolución.

Recordando que:

$$Q_{Total} = Q_{ganado} + Q_{cedido} = 0$$

se tiene:

$$-Q_{cedido} = Q_{ganado} \tag{6}$$

En este problema, tenemos un calorímetro de cobre con agua, ambos a $35°C$, al cual ingresa una piedra que se encuentra inicialmente a una temperatura mayor ($50°C$). Entonces, la piedra va a *ceder* calor al medio, el cual va a ser *ganado* por el sistema calorímetro de cobre + agua. Por definición, el calor va a estar dado por el producto entre la capacidad calorífica del material, su masa y por la variación de temperatura que experimente el material en dicho proceso de transferencia de calor. Esto es:

$$Q = C\,m\,\Delta T$$

Volviendo a la ecuación (6), se tiene:

$$-[C_{piedra}m_{piedra}(T_{eq} - 60°C)] = [C_{cobre}m_{cobre}(T_{eq} - 35°C)] + [C_{agua}m_{agua}(T_{eq} - 35°C)]$$

siendo T_{eq} la temperatura de equilibrio que alcanzará el sistema, cuando la piedra, el cobre y el agua estén a la misma temperatura.

Vamos entonces a distribuir y reagrupar, dejando de un lado todo lo que depende de T_{eq}, que es la incógnita que queremos hallar, y del otro lado los términos independientes, esto es:

$$[C_{piedra}m_{piedra} + C_{cobre}m_{cobre} + C_{agua}m_{agua}]T_{eq} = C_{piedra}m_{piedra}60°C + C_{cobre}m_{cobre}35°C + C_{agua}m_{agua}35°C$$

de donde puede despejarse T_{eq}:

$$T_{eq} = \frac{C_{piedra}m_{piedra}60°C + C_{cobre}m_{cobre}35°C + C_{agua}m_{agua}35°C}{[C_{piedra}m_{piedra} + C_{cobre}m_{cobre} + C_{agua}m_{agua}]}$$

$$\boxed{T_{eq} = 35.29°C}$$

Problema 4. Dos reglas de acero A y B miden exactamente $1\,m$. La regla A se encuentra a una temperatura de $0°C$, mientras que B está a $25°C$. ¿Cuál será la diferencia de longitud de las reglas si se encuentran a $20°C$.

Nota: $\alpha_{acero} = 12 \times 10^{-6}°C^{-1}$

Resolución.

A partir de la expresión correspondiente a la *dilatación lineal* ($\Delta l = l_f - l_0$) que sufren los cuerpos cuando se los somete a una dada variación térmica:

$$\Delta l = \alpha l_0 \Delta T \tag{7}$$

donde α es el coeficiente de dilatación lineal (dato del problema), l_0 es la longitud original del objeto (dato del problema), l_f la longitud final que queremos conocer, y ΔT corresponde a la variación térmica que experimenta el material, tenemos para cada regla la siguiente condición:

Para la regla A:

$$\Delta l_A = \alpha l_{0_A}(20°C - 0°C)$$

Como la regla A va a sufrir un aumento en su temperatura, se espera que la misma se expanda (su Δl_A debe ser mayor a cero).

Reemplazando los datos se llega a que:

$$\Delta l_A = 2.4 \times 10^{-4}\,m$$

Para la regla B:

$$\Delta l_B = \alpha l_{0_B}(20°C - 25°C)$$

De la misma forma, la regla B va a experimentar una disminución en su temperatura, con lo cual se espera que se contraiga (y su Δl_B sea negativo).

$$\Delta l_B = -6 \times 10^{-5}\,m$$

Como queremos conocer la diferencia de longitud entre las reglas a $20°C$, podemos restar:

$$\Delta l_A - \Delta lB = l_{f_A} - l_0 - (l_{f_B} - l_0) = l_{f_A} - l_{f_B}$$

Entonces:

$$l_{f_A} - l_{f_B} = 2.4 \times 10^{-4}\,m - (-6 \times 10^{-5}\,m)$$

$$\boxed{l_{f_A} - l_{f_B} = 3.4 \times 10^{-4}\,m}$$