GUÍA N°0:
Herramientas de Física y Matemática

Problema 1

Dado el vector $\vec{A} = 4\breve{i} - 6\breve{j} + 5\breve{k}$ determinar su módulo y el vector unitario en la dirección de $\vec{A}$

Problema 2

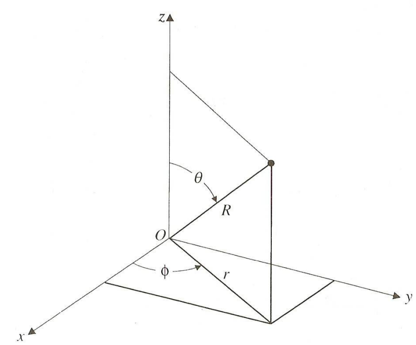
Dados los vectores $\vec{A} = 5\breve{i} - 4\breve{j} + 7\breve{k}$ y $\vec{B} = -1\breve{i} + 0\breve{j} + 9\breve{k}$ hallar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ y $\vec{A}\times\vec{B}$

Problema 3

Dadas dos partículas en el espacio ubicadas en los puntos de coordenadas P_1 = *(0,5,-2)* y P_2=*(2,3,1)*. Hallar el vector posición de la partícula 1 respecto de la partícula 2 (o sea $\mathbf{R}_{12}$), y el vector posición de la partícula 2 respecto de la partícula 1 (o sea $\mathbf{R}_{21}$). Determinar el módulo de dichos vectores y el vector unitario (versor) correspondiente. Grafique los puntos y los vectores posición citados.

Problema 4

Escribir las ecuaciones de transformación que permiten describir la posición del punto P en coordenadas cartesianas (x, y, z) a partir de coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) y esféricas (R, θ, ϕ) .



Problema 5

Describir las superficies que en coordenadas cilíndricas corresponden a r=constante, ϕ= constante y z=contante.

Problema 6

La posición de un punto en coordenadas cilíndricas está indicada por (3, 4π/3, -4). Especificar la situación del punto en coordenadas cartesianas y en coordenadas esféricas

Problema 7

Transformar las coordenadas cartesianas (4,-6,12) en coordenadas esféricas.

Problema 8

Calcular los factores de escala o coeficientes métricos $h_i = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right|$ para distintos sistemas de coordenadas ortogonales (cartesianos (q_1, q_2, q_3) = (x, y, z), cilíndricos (q_1, q_2, q_3) = (r, ϕ, z) y esféricos (q_1, q_2, q_3) = (r, θ, ϕ)) y determinar:

a) El diferencial de longitud vectorial $d\vec{\ell}$ para los tres sistemas de coordenadas

b) El vector diferencial de superficie $d\vec{S}$ para los tres planos determinados por el sistema de ejes cartesianos .¿Cómo sería para planos de ejes de simetría cilíndrica?¿es indistinto el orden en el que se realiza el producto vectorial?

c) El diferencial de volumen dV para los tres sistemas de coordenadas

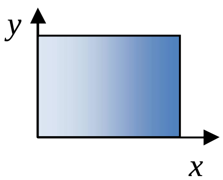
Problema 9

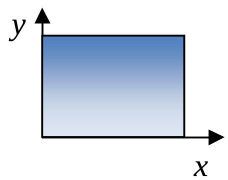
Utilizando los diferenciales adecuados, obtener a través del cálculo integral

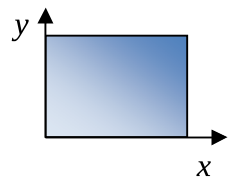
a) el perímetro de un círculo
b) el área de un anillo de radio interno R_a y radio externo R_b
c) el área de una esfera
d) el volumen de una esfera

Problema 10

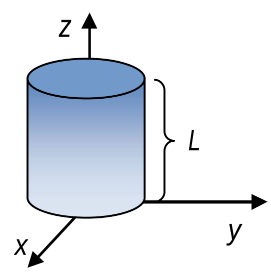
¿Cómo describiría matemáticamente la densidad superficial de tinta en las distintas figuras?

a) 

b) 

c) 

Problema 11



a) ¿Cuál es la masa de cuerpo cilíndrico de plomo de 1cm de radio y 10cm de alto? (*densidad del Pb:11340kg/m*^{3})

b) Un recipiente cilíndrico de radio R y altura L contiene un líquido cuya densidad varía linealmente con la altura $\rho(z) = A.z$ como se muestra en la figura (A *en* $\mathrm{gr/cm^4}$)¿Cuál será la masa total del líquido contenido en el recipiente?

Problema 12

Suponiendo que una nube de electrones confinada en una región entre dos esferas concéntricas de 2 y 5cm de radio, tiene una densidad de carga de $\dfrac{-3x10^{-8}}{R^4}\cos^2\phi$ ($\mathrm{C/m^3}$) encuentre la carga total contenida en la región.

Problema 13

Encuentre la función solución de la siguiente ecuación diferencial $\dfrac{dx}{dt}+ax=b$ teniendo en cuenta que debe satisfacer que en t=0, x=0

Problema 14

Dadas las funciones escalares:

a) $V = V_0 e^{-x} sen\left(\dfrac{\pi y}{4}\right)$ b) $V = E_0\, r \cos\phi$

Seleccionar adecuadamente el sistema de coordenadas para calcular su gradiente negativo ($\vec{E} = -\nabla V$).

Problema 15

Para los campos vectoriales:

a) $\vec{A} = r\,\breve{e}_r$

b) $\vec{B} = -y\,\breve{i} + x\,\breve{j}$

c) $\vec{C} = -x\,\breve{i} - y\,\breve{j} + 2z\,\breve{k}$

d) $\vec{D} = r^2\cos(\phi)\breve{e}_r + r^2 sen(\phi)\breve{e}_\phi$

e) $\vec{E} = {k}/{r}\,\breve{e}_\phi$

Calcular su divergencia y su rotacional, empleando en cada caso coordenadas cartesianas o cilíndricas.

Problema 16

Calcular el Laplaciano de la función escalar $f(x,y,z) = x^4 z - 3xy - zxy$.

Problema 17

Dados los campos escalares

a) $f(x,y,z) = x^2 y + xyz$

b) $f(r) = \dfrac{1}{r}$

Hallar el gradiente y el rotor del gradiente de cada uno de ellos. ¿Considera que es casual el resultado que ha obtenido para el cálculo del rotor?

Problema 18

Dado el campo vectorial $\vec{A}(x,y,z) = 2\breve{i} + x^2\breve{j} + xy\,\breve{k}$ hallar el valor del campo en el punto *P=(1,1,2)*. Calcular la divergencia y el rotor de este campo.

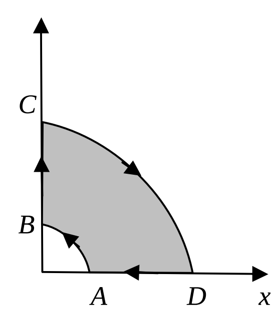
Problema 19

Suponga una función vectorial $\vec{F} = 5.r.sen\phi\,\breve{e}_r + r^2\cos\phi\,\breve{e}_\phi$

a) Calcule la $\oint \vec{F}.\vec{d\ell}$ a lo largo del contorno *ABCDA* en la dirección indicada en la figura

b) Calcule $\nabla \times \vec{F}$

c) Calcule $\int (\nabla \times \vec{F}) d\vec{S}$ sobre el área sombreada y compare el resultado con el que obtuvo en la parte a)



Problema 20

Calcular el flujo del campo $\vec{B}(x,y,z) = 2\breve{i} + 0\breve{j} + 0\breve{k}$ a través de un cuadrado de lado 5 ubicado:

a) en forma perpendicular al eje *x*.

b) en forma perpendicular al eje *z*.

Problema 21

Hallar el flujo del campo $\vec{F} = 4xz\breve{i} - y^2\breve{j} + yz\breve{k}$ a través de la superficie *S* del cubo limitado por x=0, x=1, y=0, y=1, z=0 y z=1

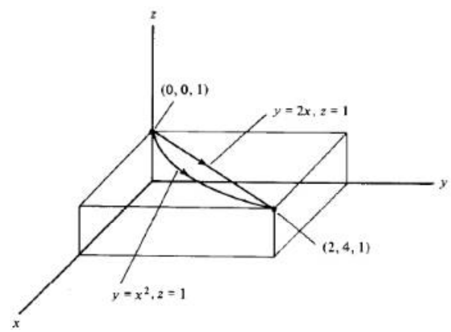
a) calculando la integral de superficie $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{dS}$
b) haciendo uso del teorema de la divergencia de Gauss

Problema 22

Calcular el flujo del campo $\vec{A}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r^2}\breve{e}_r$ sobre una esfera de radio R centrada en el origen. ¿Cómo varía el flujo a través de la esfera a medida que el radio R aumenta? ¿Es válida esta afirmación si el campo fuera de la forma $1/r$? ¿Este resultado contradice el teorema de la divergencia?

Problema 23

Dados los campos de fuerza
$\vec{F}(x,y,z) = 2y\breve{i} + 2x\breve{j} + z\breve{k}$ y $\vec{G}(x,y,z) = 3xy\breve{i} - 5z\breve{j} + 10x\breve{k}$

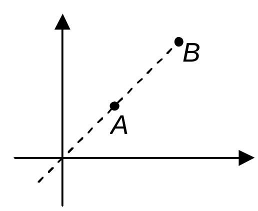


a) calcular el trabajo realizado por cada uno de ellos al mover un objeto desde un punto *(0,0,1)* hasta el punto *(2,4,1)* a través de los siguientes caminos:
C_1: $y = x^2$, $z = 1$;
C_2: $y = 2x$, $z = 1$.

b) hallar el rotor de cada uno de los campos
c) determinar cuál de estos campos es conservativo y hallar la función potencial correspondiente.

Problema 24

Una partícula de masa *m,* cuando es liberada en el punto A experimenta una fuerza $\vec{F} = C/r^2\,\breve{e}_r$ que la mueve hacia el punto B.



a) Calcular el trabajo que realiza la fuerza sobre la partícula cuando recorre la distancia $|\vec{r}_b - \vec{r}_a|$
b) Determinar la velocidad de la partícula al llegar al punto *B (ayuda: tome en consideración el Teorema de las Fuerzas Vivas)*

Problema 25

Calcule el desarrollo en serie de Taylor para *x=0* de la función $f(x) = \frac{1}{(1+x)^{1/2}}$ y de la función $f(x) = \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$

Problema 26

Expresar los siguientes números en notación científica y determinar el número de cifras significativas

a) 0,00003	b) 101,3	c)1,40	d)1,4
e) 0,14	f) 0,014	g)14000	h)0,034904

Problema 27

Se realiza una medición indirecta de una dada magnitud física. Los valores obtenidos con la calculadora son x y ξ para el cálculo de la medida y para el cálculo de la incerteza repectivamente. Exprese correctamente el resultado de la medición escribiendo el error con una sola cifra significativa.

a) x= 453 ξ = 0,51 b) x=0,0237 ξ = 0,01
c) x=56,789 ξ =0,138 d) x=30.098 ξ =0,05

Problema 28

Considerando una medición indirecta donde $A = f(x, y, z, ...)$ y la incerteza absoluta asociada con dicha medición se calcula mediante la expansión en serie de Taylor de primer orden

$$\Delta A = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial} y\right|_{y_0} \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z_0} \Delta z + ... \text{ (incerteza máxima)}$$

Calcule la incerteza asociada a una medición indirecta donde:

$f(x, y) = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{sen(y)}}$, con x=4,5±0,1 e y= π/2±0,01 rad

Problema 29

Se desea medir el área de una superficie rectangular, para ello se mide los lados de la misma, siendo las cantidades obtenidas las siguientes: $l = 10.02cm \pm 0.04cm$ y $a = 5.04cm \pm 0.02cm$. Calcule el área y la incerteza absoluta asociada a dicho cálculo.

Algunas identidades vectoriales útiles

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \times \mathbf{A} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$\nabla(\psi V) = \psi \nabla V + V \nabla \psi$$

$$\nabla \cdot (\psi \mathbf{A}) = \psi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \psi$$

$$\nabla \times (\psi \mathbf{A}) = \psi \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \psi \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \nabla V = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \qquad \text{(Teorema de la divergencia)}$$

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} \qquad \text{(Teorema de Stokes)}$$

Operaciones de gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano

Coordenadas cartesianas (x, y, z)

$$\nabla V = \mathbf{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \mathbf{a}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{a}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z)

$$\nabla V = \mathbf{a}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \mathbf{a}_\phi \frac{\partial V}{r \partial \phi} + \mathbf{a}_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r A_r) + \frac{\partial A_\phi}{r \partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & \mathbf{a}_\phi r & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & r A_\phi & A_z \end{vmatrix} = \mathbf{a}_r \left(\frac{\partial A_z}{r \partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_\phi \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \mathbf{a}_z \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r A_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right]$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Coordenadas esféricas (R, θ, ϕ)

$$\nabla V = \mathbf{a}_R \frac{\partial V}{\partial R} + \mathbf{a}_\theta \frac{\partial V}{R \partial \theta} + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{R \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R}(R^2 A_R) + \frac{1}{R \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{R \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{R^2 \operatorname{sen} \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_R & \mathbf{a}_\theta R & \mathbf{a}_\phi R \operatorname{sen} \theta \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_R & R A_\theta & (R \operatorname{sen} \theta) A_\phi \end{vmatrix} = \mathbf{a}_R \frac{1}{R \operatorname{sen} \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\phi \operatorname{sen} \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{R} \left[\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial A_R}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial R}(R A_\phi) \right] + \mathbf{a}_\phi \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R}(R A_\theta) - \frac{\partial A_R}{\partial \theta} \right]$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial V}{\theta} \right) + \frac{1}{R^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

<u>Bibliografía útil para resolver esta guía:</u>

-Fundamentos de Electromagnetismo para ingeniería de D. Cheng, Cap. 2 (Biblioteca Central)

-http://portales.puj.edu.co/objetosdeaprendizaje/Online/OA04/Contenido%20Calculo.htm