Capítulo 5

♣ Métodos cuantitativos y regresión lineal

Objetivos

En este capítulo presentamos el método de cuadrados mínimos que permite obtener los parámetros óptimos de una curva, que ajustan un conjunto de datos (x_i,y_i) y se discuten modos de cuantificar la bondad de dicho ajuste. Se estudia el significado del coeficiente de correlación y Chi cuadrado. Hacemos una digresión sobre el principio de parsimonia o navaja de Occam en relación a la descripción matemática de datos empíricos y la significación de los parámetros obtenidos de un ajuste. Se estudia el caso de a regresión lineal. Finalmente, se comentan algunas precauciones útiles de tener en cuanta en el análisis de datos experimentales.

Método de cuadrados mínimos. Regresión lineal

En el capitulo 4 se discutió la importancia de las representaciones gráficas para descubrir o visualizar las expresiones matemáticas que describen la dependencia implícita en una conjunto de datos empíricos (x_i,y_i). A menudo nos confrontamos con situaciones en las que encontramos, o suponemos, que existe una relación lineal entre las variables x e y. ¿Cuáles son loa parámetros de la recta que mejor se ajusta a nuestros datos? El *método de cuadrados mínimos* es un procedimiento muy útil que permite responder esta pregunta. Cuando la relación entre las variables x e y es lineal, el método de ajuste por cuadrados mínimos se denomina también *método de regresión lineal*. En este capitulo discutiremos este último caso, dejando para el Apéndice F la discusión del caso general de cuadrados mínimos, cuando el modelo que describe la dependencia entre x e y es no lineal y además los datos están afectados de errores.

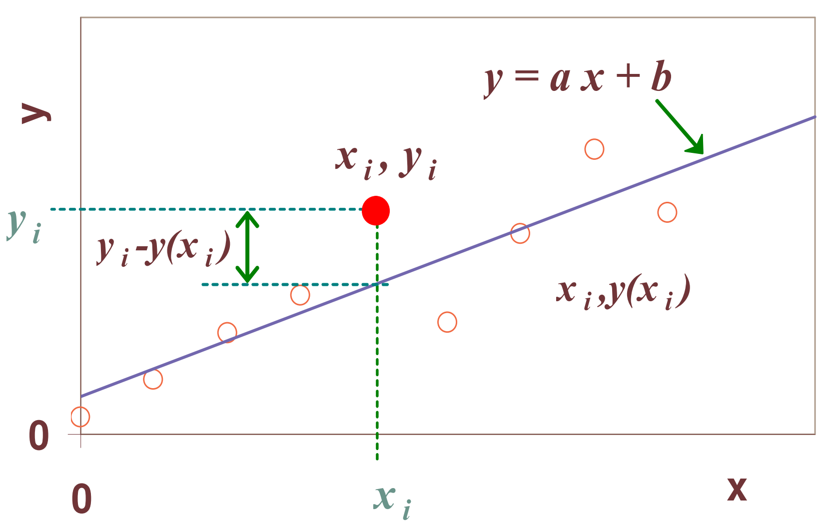

Figura 5.1 Representación gráfica de (x_i,y_i) con tendencia lineal. Los círculos representas valores observados. La recta es la representación del modelo $y(x)=ax+b$. La cantidad $y_i-y(x_i)$ es la desviación de cada observación de y_i respecto del valor predicho por el modelo $y(x_i)$.

Observamos que los datos de la figura 5.1 tienen una tendencia aproximadamente lineal. Nuestro objetivo es encontrar la *mejor recta* que ajusta estos datos, o sea los valores de a y b en:

$$y(x) = a\,x + b \tag{5.1}$$

que mejor describen los datos observados. Resulta útil definir la función χ^2 (Chi-cuadrado):[1,2,3,4]

$$\chi^2(a,b) = \sum_i \left[y_i - (ax_i + b)\right]^2 . \tag{5.2}$$

Esta función, χ^2, es una medida de la desviación total al cuadrado, $[y_i\text{-}y(x_i)]^2$, de los valores observados y_i respecto de los predichos por el modelo lineal $a.x+b$. En otras palabras, χ^2 es una medida de la distancia (vertical) de todos los datos (x_i,y_i), a la recta. Para un dado conjunto de datos (x_i,y_i), el valor de χ^2 depende de los parámetros de la recta, a y b. El método de cuadrados mínimos supone que los valores de la pendiente a y la ordenada al origen b, que mejor ajustan los datos, son aquellos que minimizan esta desviación total, o sea, los que minimizan la función $\chi^2(a,b)$. El problema de minimización se reduce al de resolver el par de ecuaciones:

$$\frac{d\chi^2}{da} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d\chi^2}{db} = 0 \tag{5.3}$$

cuyas incógnitas son a y b. Resolviendo estas ecuaciones, resulta[1,2,3,6]:

$$a = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} , \tag{5.4}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} . \tag{5.5}$$

La recta obtenida con estos coeficientes se denomina *línea de regresión*. Dado que las sumas de las Ec.(5.4) y (5.5) se presentan con mucha frecuencia, es útil introducir la siguiente notación:

$$< x^k > \equiv \frac{\sum x_i^k}{N}, \quad < y^k > \equiv \frac{\sum y_i^k}{N} \quad \text{con } k = 0,1,2,... \tag{5.6}$$

y

$$< xy > \equiv \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} . \tag{5.7}$$

Con esta notación, las expresiones (5.4) y (5.5) se pueden escribir como:

$$a = \frac{<xy> - <x><y>}{<x^2> - <x>^2}, \tag{5.8}$$

y

$$b = <y> - a <x> . \tag{5.9}$$

Estas fórmulas para a y b están incorporadas en la mayoría de los programas de análisis de datos y planillas de cálculo. En los programas como Excel ® Microsoft, Origin®Originlab, Matlab®MathWorks, etc., este cálculo se realiza usando la herramienta "regresión lineal" o "ajuste lineal". Los resultados (5.4) y (5.5) se aplican cuando todos los datos de la variable dependiente tienen la misma incertidumbre absoluta y la incertidumbre de la variable independiente se considera despreciable. En el Apéndice F se discute el caso en que ambas variables tengas errores.

Una medida de la calidad o bondad del ajuste realizado viene dado por el *coeficiente de correlación* R^2 entre las variables x e y, que adopta valores entre 0 y 1 y caracteriza la dispersión de los datos alrededor de la línea de cuadrados mínimos. [1,2,3,6]

Consideremos las desviaciones de los puntos observados, (x_i,y_i): A) respecto de la recta obtenida de cuadrados mínimo y B) respecto a la recta horizontal $y=\bar{y}$, donde $\bar{y}$ es el promedio de los valores y_i. Si la recta de cuadrados mínimos es una buena descripción de los datos, los valores (x_i,y_i) se agrupan a lo largo de la línea de regresión. La suma de los cuadrados de las desviaciones a esta línea, representados por χ^2, debería ser menor que la suma de los cuadrados de las desviaciones a la línea horizontal $y=\bar{y}$. Se define el coeficiente de correlación al cuadrado, R^2:

$$R^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2 - \sum [y_i - (ax_i + b)]^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2 - \chi^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} . \tag{5.10}$$

El primer término en el numerador es la suma de los cuadrados de las desviaciones de los puntos de la línea horizontal que pasa por $\bar{y}$. El segundo término es la suma de los cuadrados de las desviaciones de los puntos de la línea de regresión $y = a\,x + b$, o sea por χ^2, definido por la Ec.(5.2). Nótese que R^2 es adimensional. Si los datos caen exactamente sobre la línea de regresión, hay correlación perfecta, el segundo término es aproximadamente cero ($\chi^2 \approx 0$) y $R^2 \approx 1$. Por otro lado, a medida que peor es el ajuste, mayor será el valor de χ^2. El valor máximo que puede alcanzar χ^2 es $\sum (y_i - \bar{y})^2$, en este caso, no hay correlación entre las variables x e y, y el numerador de la Ec.(5.19) es cero, o sea: $R^2 \approx 0$.

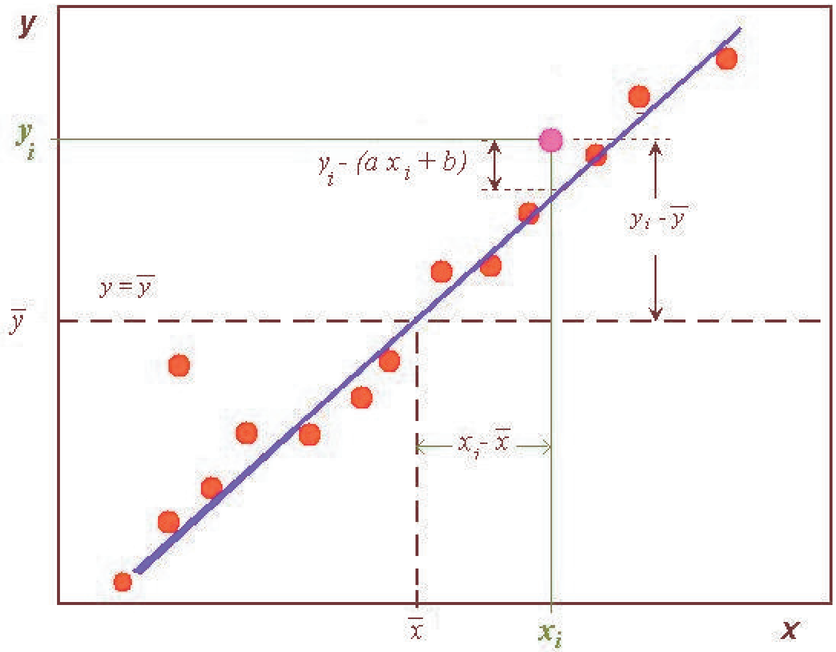

Figura 5.2 Datos empíricos (círculos) que se agrupan a lo largo de una recta $y = a\,x + b$. Las desviaciones de los puntos de la recta de cuadrados mínimos y las desviaciones de los puntos a la recta horizontal sirven para definir al coeficiente R^2 [(Ec. (5.10)].

Cuando en (5.10) se sustituyen las ecuaciones (5.4) y (5.5) para a y b, se obtiene para R^2:

$$R^2 = \left[\frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N\sigma_x\sigma_y}\right]^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2}\,. \tag{5.11}$$

donde

$$\sigma_x^2 \equiv < x^2 > - < x >^2 \,, \qquad \sigma_x^2 \equiv < y^2 > - < y >^2 \tag{5.12}$$

$$\sigma_{xy} \equiv < xy > - < x >< y > = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N}\,. \tag{5.13}$$

También es posible escribir:

$$R^2 = 1 - \frac{\chi^2}{N \cdot Var(y)}\,. \tag{5.14}$$

Si $R^2 \approx 1$, decimos que el modelo lineal es adecuado para describir los datos experimentales y hay buena correlación (lineal) en los datos de x e y. Cuando $R^2 \approx 0$, decimos que la expresión lineal no es una descripción adecuada de los datos. En este caso, conviene analizar detenidamente el gráfico y buscar una relación no–lineal que aproxime mejor la dependencia de x con y.

Un valor de $R \approx 0$ no implica que no haya correlación entre las variables, sólo significa que la *relación lineal* entre ellas no es adecuada. Así, si los pares de puntos (x, y) describen una circunferencia, tenderemos que $R \approx 0$. Ver figura 5.3. Desde luego, si los pares (x, y) no tienen correlación alguna entre ellos, también tendríamos $R \approx 0$.

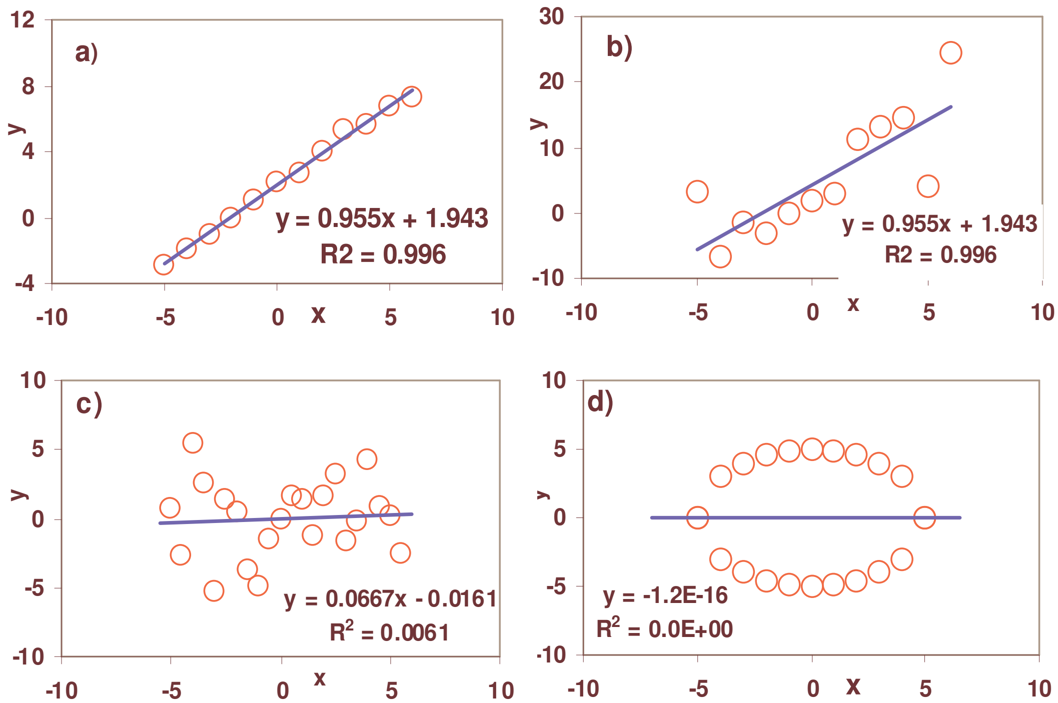

Figura 5.3 Ajuste de datos experimentales por un modelo lineal. a) Caso de una buena correlación lineal, b) aceptable, c) es un caso en el que prácticamente no hay correlación entre x e y, d) existe una buena correlación pero el modelo lineal es inadecuado.

Correlación y causalidad

Cuando estudiamos la relación entre la longitud L de una barra, y su temperatura, T, se observa una conexión causal entre estos parámetros. Es decir la temperatura T determina el valor de L. Una observación importante a tener en cuenta es que una correlación entre dos conjuntos de datos x e y, no siempre implica una relación de *causalidad* entre ellos. En otras palabras, si $R^2 \approx 1$, esto no significa necesariamente que y depende *causalmente* de x o viceversa. La correlación entre las variables en una *condición necesaria pero no suficiente* para exista una dependencia causal entre ellas. Esta falacia lógica, de atribuir causalidad a dos eventos que ocurren a la vez, se conoce como "*cum hoc ergo propter hoc*" ("Si aparecen juntos es que son causa y efecto"). El siguiente ejemplo ilustra esta falacia. Cuando más grande es un incendio, mayor es número de bomberos combatiéndolo. Si se graficase el tamaño de incendio en función del número de bomberos, seguramente se obtendría una buena correlación. Una afirmación errónea, a la que apunta la falacia, sería concluir que el número de bomberos determina o es la "causa" del tamaño del incendio.

Una correlación estadística es un indicio de una posible relación causal. Para establecer una conexión causal entre las variables es necesario un análisis cuidadoso. La no observación de estos criterios ha conducido a notables errores en el pasado. Un ejemplo fue la observación que "*Los niños que duermen con la luz encendida son más propensos a desarrollar miopía en la edad adulta.*" Este estudio fue realizado en un centro médico de la Universidad de Pensilvania y llegó a la revista Nature en mayo de 1999. Estudios posteriores encontraron una falacia en esta conclusión. Observaciones más cuidadosas muestran un importante carácter hereditario en la miopía. Como los padres miopes requieren de buena iluminación para ver, ellos tienden a dejar más luces encendidas en las habitaciones de sus hijos.[5]

Incerteza en los parámetros de ajuste

En muchos casos, el objetivo de una determinado estudio experimental obtener los parámetros de un ajuste. Por ejemplo, si deseamos determinar la constante elástica k de un resorte a partir de mediciones de las fuerzas aplicadas F_i y sus respectivos estiramientos x_i, el valor de k será precisamente la pendiente de la recta que mejor se ajusta a los datos. Otro ejemplo es la obtención de la resistencia eléctrica R de un conductor. A partir de mediciones de tensión V_i y de la corriente que lo atraviesa I_i, de la pendiente de V_i en función de I_i, obtenemos R. La pregunta que queremos responder ahora, es cuales son los errores de estos parámetros obtenidos por cuadrados mínimos.

Resulta útil disponer de un modo de estimar las incertidumbres asociadas a la determinación de los parámetros a y b de la Ec. (5.1)[1,3,4,6] , que denotaremos con los símbolos σ_a y σ_b. En esta sección sólo presentamos los resultados de mucha en la práctica; el lector interesado podrá encontrar un tratamiento más exhaustivo y la justificación de los mismos en las referencias [2,3,4,6]. Las incertidumbres de los parámetros del ajuste vienen dadas por las expresiones:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\chi_N^2}{N \cdot Var(x)}} \tag{5.15}$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{\chi_N^2 \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N \cdot Var(x)}} = \sigma_a \cdot \sqrt{< x^2 >} \tag{5.16}$$

donde χ_N^2, conocido como el valor de Chi-cuadrado por grado de libertad, viene dada por:

$$\chi_N^2 = \frac{1}{N-2} \cdot \chi^2 \tag{5.17}$$

y

$$Var(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \right)^2 = < x^2 > - < x >^2 . \tag{5.18}$$

Las incertidumbres de los parámetros a y b también pueden escribirse en términos del coeficiente de correlación R^2 del siguiente modo:[6]

$$\sigma_a = a \cdot \sqrt{\frac{1}{(N-2)} \cdot \left(\frac{1}{R^2} - 1 \right)} , \tag{5.19}$$

$$\sigma_b = \sigma_a \sqrt{< x^2 >} \qquad (5.20)$$

Con:

$$< x^2 >= \frac{\sum x_i^2}{N} \qquad (5.21)$$

Estas expresiones son de interés puesto que permiten estimar los valores de σ_a y σ_b a partir de los de a y R^2, valores que pueden proveer planillas de cálculo y programas de ajuste de datos.

La navaja de Occam o criterio de parsimonia

La *navaja de Occam*[φ] establece que al elaborar una teoría o explicación de un fenómeno, no debieran hacerse más suposiciones que las mínimas necesarias. Las descripciones deben mantenerse lo más simples posibles hasta el momento en que se demuestre que resultan inadecuadas. Este principio filosófico se conoce también como *criterio de parsimonia* y es una idea subyacente en todo el pensamiento científico y filosófico. Su consideración es además pertinente a la hora de elaborar modelos explicativos.

Si se puede explicar el comportamiento de un fenómeno con pocas variables explicativas y si la teoría explicativa pertinente no es lo suficientemente fuerte para sugerir otras variables que deban ser incluidas, ¿por qué introducir más variables? Por ejemplo, si un fenómeno se puede explicar por una relación lineal, ¿por qué usar un polinomio de 5º grado? Si los datos se ajustan por una recta del tipo $y=ax+b$, y b es cercano a cero, siempre es conveniente preguntarse si nuestros datos pueden efectivamente explicarse por una relación de tipo $y = ax$. Nótese que esta última expresión solo tiene un parámetro libre (a) mientras que la anterior tenía dos (a y b), por lo tanto la última es 50% más simple y económica. Lógicamente, si al ajustar los datos con $y = ax$ obtenemos un mal ajuste y con $y = ax + b$ lo mejoramos, en ese caso optamos por la expresión con los dos parámetros.

Karl Popper[7] propone una interesante fundamentación de este principio. Según este autor, una teoría o hipótesis es mejor cuanto más fácilmente se puede poner a prueba su posible falsedad, esto es, cuando "más falsable" sea la hipótesis, ver Cap.0. Imaginemos que estamos estudiando un fenómeno que relaciona dos variables observables (susceptibles de ser medidas) X y Y. Imaginemos que disponemos de dos conjuntos de datos observados para estas variables:

Datos	X	Y
Medición 1	1	1
Medición 2	3	5

Para explicar este fenómeno se plantean las siguientes tres hipótesis alternativas, que se ilustran en la figura 5.4.

[φ] "*Pluralitas non est ponenda sine neccesitate*" or "La complejidad no debe de ser introducida sin necesidad". Estas aseveraciones son del filósofo y monje franciscano inglés William of Ockham (u Occam) (ca. 1285-1349). Como buen franciscano, Occam era un minimalista, idealizando la vida en simplicidad y pobreza al estilo de San Francisco de Asís. Occam fue excomulgado por el Papa Juan XXII.

Hipótesis	
H1	$Y=aX+b$
H1	$Y=\alpha X^3+\beta X^2+\gamma X+\delta$
H3	$Y=cX^4+dX^3+eX^2+fX+g$

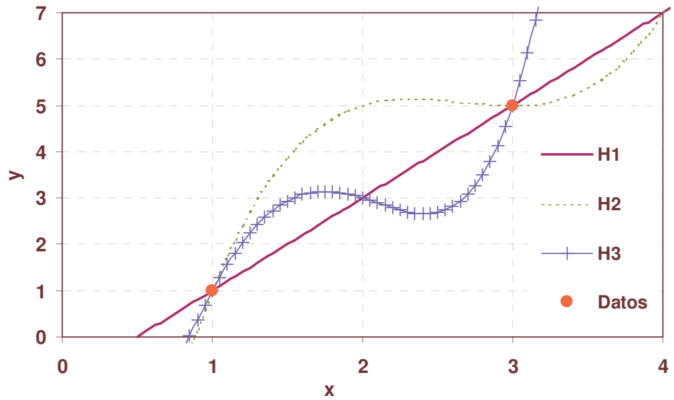

Figura 5.4. Las curvas continuas representan tres hipótesis alternativas para explicar los dos pares de datos observados, representados por dos círculos llenos.

En este ejemplo se ve claramente que un solo dato observacional más, una medición adicional, puede falsear la hipótesis H1, para falsear la hipótesis H2 se requieren de al menos 3 datos medidos más y para la hipótesis H3 cuatro datos más. Por lo tanto vemos que al ser la hipótesis más simple (H1) la más fácilmente falsable, en ausencia de otra información sobre el fenómeno, deberíamos elegir la más simple.

📖 **Ejemplo:** Al estudiar la relación entre el estiramiento de un resorte en función de la fuerza aplicada, ver la figura 5.5, se encuentra que la recta que mejor ajusta los datos es:

$$F(N) = 90.25 \cdot \Delta x(m) - 0.04 \qquad \text{con} \qquad R^2 = 0.992 \qquad (5.22)$$

ΔX(m)	F(N)
0	0
0.02	1.65
0.033	3.2
0.045	3.6
0.06	5.5
0.075	7
0.091	8

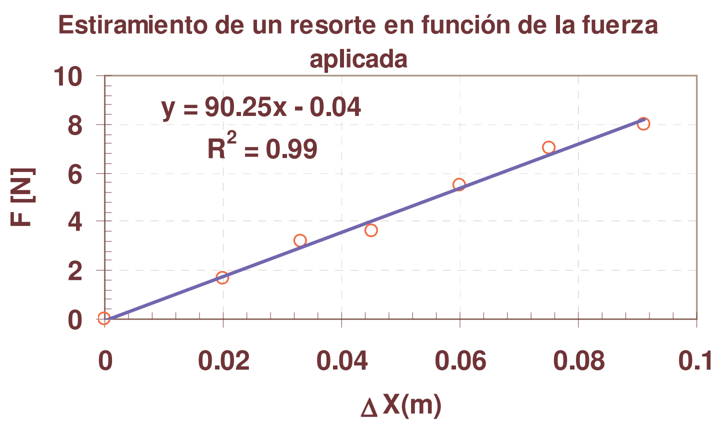

Figura 5.5. Ejemplo de datos y gráfico resultado de estudiar la relación entre el estiramiento ΔX(m) de un resorte en función de la fuerza aplicada F, medida en Newton.

Una pregunta que debemos siempre formularnos, según el pincipio de parsimonia, es si los coeficientes que obtuvimos son significativos, o sea si tal vez no será posible encontrar una relación funcional aun más simple que la que obtuvimos. Algo más simple sería ajustar los datos con una recta que no tenga ordenada al origen. Si hacemos esto con los datos de la figura 5.5, obtenemos:

$$F(N) = 89.61\,\Delta x(\mathrm{m}) \qquad \text{con} \qquad R^2 = 0.992\,. \tag{5.23}$$

Vemos que en este último caso el coeficiente de correlación es tan bueno como antes, pero la expresión matemática tiene la mitad de los parámetros libres que antes (solo la pendiente a). Por lo tanto, según el criterio de parsimonia, nos quedamos con este último ajuste, que es tan bueno como el anterior, pero más simple.

Otro modo de analizar este mismo problema consite en estimar los errores de los parámetro del primer ajuste usando las expresiones (5.19) y (5.20). Si realizamos este analisis, el resultado que se obtiene es:

$$F = a\,\Delta x + b \quad \text{con} \quad R^2 = 0.992 \tag{5.24}$$

y

$$a = 90.25 \text{ N/m},\ \Delta a = 3.5 \text{ N/m},\ b = -0.04 \text{ N y } \Delta b = 0.19 \text{ N}. \tag{5.25}$$

En otras palabras:

$$a = (90 \pm 4) \text{ N/m} \quad y \quad b = (-0.04 \pm 0.2\,) \text{ N}. \tag{5.26}$$

Por lo tanto, vemos que el coeficiente *b es compatible* con cero, ya que su error (0.2 N) es mayor que su valor absoluto (0.04 N). Cuando el error absoluto de un parámetro es del mismo orden o mayor que su valor absoluto, decimos que dicho parametro *no es significativo* y es compatible con cero. En otros palabras, los datos son compatibles con un valor nulo del parámetro y por consiguiente, en este caso, de acuerdo con el criterio de parsimonia podemos prescindir de ese parámetro y quedarnos con la expresión más simple: $F = a\,\Delta x$. Notese que como $\Delta a \ll a$, el parámetro a sí es significativo.

Resumen de conceptos importantes

Se sugiere que el lector de una explicación concisa de los principales conceptos del capítulo y, cuando sea posible, indique un ejemplo apropiado.

- ✓ Reseñe los fundamentos del método de cuadrados mínimos.
- ✓ ¿Qué interpretación se confiere al coeficiente de correlación lineal R^2?
- ✓ Interprete y resuma la idea subyacente en el principio de parsimonia.
- ✓ ¿Qué parámetros pueden usarse para evaluar la calidad de un ajuste? En particular discuta similitudes y diferencias entres R^2 y χ^2.

Referencias

(ver al final)

Ejercicios y problemas

1) Los médicos pediatras utilizan tablas de crecimiento promedio de los niños como función de la edad para evaluar si sus pacientes evolucionan de acuerdo a lo esperado. Entidades pediátricas se encargan de confeccionar dichas tablas, distinguiendo entre el crecimiento de niños y niñas. A continuación se muestra una tabla para la altura media de los niños entre el mes de vida y los seis años:

Edad (meses)	**Estatura media para el varón (cm)**
1	54
2	57.09
3	60.4
4	62.25
5	65
6	66.74
7	68.01
8	69.6
9	71.11
10	72.3
11	73.65
12	75.01
15	78.2
18	81.3
21	84
24	86.7
30	91.1
36	95.2
42	95.2
48	102.5
54	105.7
60	108.7
66	111.8
72	114.1

a) Encuentre la mejor función que represente la altura de los niños en función del tiempo.

b) ¿Qué representan cada uno de los parámetros de la función de ajuste elegida?

c) ¿Puede predecir qué altura tendrá un niño promedio a la edad de 10 años? ¿Cómo haría esa predicción? Analice el grado de validez de su predicción.

2) En la tabla siguiente se muestran los pesos y alturas para varones y mujeres mexicanos.

a) Represente las alturas y pesos de mujeres y hombres y trate de linealizar los gráficos.

b) ¿Es razonable extrapolar de los mismos las alturas a 30 y 40 años?, Justifique su respuesta y compare con lo que se conoce del crecimiento de los humanos.

	Tabla de peso y altura en niñas		Tabla de peso y altura en niños	
	Peso promedio (Kg)	Talla promedio (cm)	Peso promedio (Kg)	Talla promedio (cm)
Edad (meses)	Peso (niñas)	Talla(niñas)	Peso (niños)	Talla(niños)
1	3.98	53.5	4.3	54.6
2	4.72	56.4	5.11	57.8
3	5.4	59.5	6	61.1
4	6.21	62	6.65	63.5
5	6.81	64.1	7.23	66
6	7.21	65.9	7.85	67.8
7	7.8	67.6	8.2	69.4
8	8.19	69.4	8.6	70.8
9	8.56	70.4	9.18	72.3
10	8.95	72	9.39	73.5
11	9.25	73.2	9.7	74.7
12	9.53	74.3	10.15	76.1
15	10.4	77.5	10.7	79
18	10.8	80.9	11.4	82.4
21	11.7	83.3	12	84.8
24	11.9	86.5	12.5	87.6
30	12.9	91.3	13.67	92.3
36	13.9	95.6	14.69	96.5
42	15	97.9	15.68	99.1
48	15.9	101.6	16.6	102.9
54	16.8	105	17.6	106.6
60	17.6	108.4	20.1	109.9
96		120		125
132		130		140
192		152		160
240		162		170
288		162		170
300		162		170

3) A continuación se reproduce una tabla de con los nombres de algunos dinosaurios con su largo y masa estimada. A partir de esta tabla, ¿qué puede decir de la dependencia de la masa de los dinosaurios como función de sus largos? Referencia: http://en.wikipedia.org/wiki/Dinosaur_size

Nombre	Largo (m)	Peso(kg)
Compsognathus	0.6	0.26
Compsognathus (1)	0.6	0.5
Compsognathus (2)	0.6	3.2
Juravenator	0.75	0.34

Juravenator (2)	0.75	0.34
Compsognathus (1)	1.4	3.50
Carcharodontosaurus (1)	12	6,500
Tyrannosaurus (1)	12.5	6,000
Tyrannosaurus (2)	13	13,800
Carcharodontosaurus(2)	13	13,800
Spinosaurus	14.3	7,000
Spinosaurus	18	20,900
Apatosaurus (deceptive lizard)	22.9	29,937
Argentinosaurus	30	80,000
Ultrasauros (ultra lizard)	30.2	63,350
Brachiosaurus (arm lizard)	30.5	45,360
Supersaurus (super lizard)	30.5	54,432
Diplodocus	33.5	38,000
Seismosaurus (tremor lizard)	45.7	90720

(1) y (2) corresponden a datos obtenidos de dos ejemplares distintos de la misma especie.

4) Leyes de Kepler. La tabla muestra la distancia media al Sol de los distintos planetas del Sistema Solar y sus respectivos períodos de rotación alrededor del Sol (duración del año).

Planetas	Distancia al Sol (km)	Órbita (días)
Mercurio	5.79×10^7	87.97
Venus	1.08×10^8	224.70
Tierra	1.50×10^8	365.26
Marte	2.28×10^8	686.98
Júpiter	7.78×10^8	4,328.90
Saturno	1.43×10^9	10,752.90
Urano	2.87×10^9	30,663.65
Neptuno	4.50×10^9	60,152.00
Plutón	5.91×10^9	90,717.10

1) Usando los datos de la tabla grafique la duración del año planetario, T_p, en función de su distancia al Sol, d_S. Usando escalas lineales y logarítmicas, describa la dependencia de T_p con d_S.
2) La tercera ley de Kepler[ε] postula que T_p^2 es proporcional a d_S^3. ¿Sus resultados avalan o refutan esta ley?
3) En muchas áreas de las ciencias encontramos leyes de conservación, como las leyes de conservación de la energía o el momento. Estas leyes establecen que determinadas cantidades no varían antes de después de un dado proceso o son las mismas a lo largo del tiempo o al pasar de un objeto a otro de un sistema. En ese sentido la tercera ley de Kepler establece que para todos los planetas la relación T_p^2 / d_S^3 es una constante para todos los planetas del sistema solar, es decir esta cantidad se "conserva". A partir de los datos de la tabla, establezca la validez o no de esta afirmación. ¿Sus datos avalan o refutan esta ley?

[ε] Johannes Kepler (1571 - 1630), fue un astrónomo y matemático alemán; conocido por sus leyes sobre el movimiento de los planetas alrededor del sol . Fue colaborador de Tycho Brahe, a quien sustituyó como matemático imperial de Rodolfo II.

4) Una hipótesis consistente con las leyes de Newton es la de suponer que si los planetas se mueven en órbitas circulares, o cuasi-circulares, existe una fuerza que ejerce el Sol sobre los planetas y que los atrae hacia el centro (fuerza centrípeta). Supongamos que esa fuerza gravitatoria tiene una dependencia con la distancia r al Sol de la forma: $F_{grav} = k/r^n$, donde n es un número real, por ahora desconocido. Según sabemos, para que un objeto se mueva en una órbita circular de radio r y de periodo T, la fuerza centrípeta necesaria para que se mantenga en esa órbita es:

$$F_{cent} = F_{grav} \Rightarrow m\,\omega^2 r = m\,4\pi^2 r / T^2 = k / r^n . \qquad (27)$$

Aquí m representa la masa del planeta en estudio y r su distancia al Sol. De esta relación se deduce que:

$$r^{n+1} / T^2 = 4\pi^2 k / m . \qquad (28)$$

a) Comparando este resultado con el de su análisis grafico, deduzca el valor del exponente n de la fuerza gravitatoria y como debe depender la constante k con m para que se cumpla la tercera ley de Kepler para todos los planetas del Sistema Solar.
b) Compare sus resultados con lo que se conoce de la fuerza gravitatoria. ¿Qué puede concluir de la conclusión a la que se llega a partir de las leyes de Kepler?

5) Se desea conocer la constante k de un resorte, las mediciones de pesos colgados P(N) versus estiramientos X(m) dieron los siguientes valores:

P (N)	0	20	30	50	100	150	170
X (m)	0	0.0051	0.0071	0.0125	0.0256	0.031	0.0402

a) Determine los mejores valores de la pendiente y ordenada al origen de la recta que mejor ajuste sus datos. ¿Cuáles son los errores en estos parámetros?
b) ¿El valor de la ordenada al origen es significativamente distinto de cero o es consistente con este valor?
c) Estime el valor de k y su incertidumbre relativa y absoluta.

Índice alfabético

Regresión lineal	reglineal

Referencias

[1] S. Gil y E. Rodríguez, *Física re-Creativa*, Prentice Hall, Buenos Aires 2001.
http://www.fisicarecreativa.com

[2] D. C. Baird, *Experimentación*, 2ª ed., Prentice-Hall Hispanoamericana S.A., México, 1991.

[3] P. Bevington and D. K. Robinson, *Data reduction and error analysis for the physical sciences*, 2nd ed. (McGraw Hill, New York, 1993).

[4] Stuardt L. Meyer, *Data analysis for scientists and engineers* (John Willey & Sons, Inc., New York, 1975).

[5] "Night lights don't lead to nearsightedness, study suggests", Ohio State University, 2000,
http://researchnews.osu.edu/archive/nitelite.htm.

[6] J. Higbie, "Uncertainty in the linear regression slope", *Am. J. Phys*. 59, 184 (1991)

[7] Ver , por ejemplo, Karl Popper en http://es.wikipedia.org/wiki/Karl_Popper