Prof: Dr. Walter Reimers

TRABAJO PRACTICO DE LABORATORIO N° 4

TEMA: Determinación de la aceleración de la gravedad

OBJETIVOS

- Calcular el valor de la aceleración de la gravedad con un péndulo simple.
- Calcular el valor de la aceleración de la gravedad mediante un método gráfico con aplicación de método de ajuste.
- Preparar la experiencia para obtener el valor de "g" con un determinado error.
- Realizar las aproximaciones necesarias a un péndulo real para poder considerarlo como péndulo puntual.

FUNDAMENTO TEÓRICO

Se dice que cuando un cuerpo puntual se mueve con movimiento armónico simple, el período de oscilación del mismo está dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (1)$$

de modo que midiendo T y L será posible conocer la aceleración de la gravedad g.

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

Se propone obtener el valor de g, usando la ecuación 1, con un error porcentual menor que 0.1%. Como el valor promedio de la aceleración de la gravedad es $g \approx 980\ cm/s^2$, este error porcentual equivale a obtener un error absoluto $E_g \approx 1\ cm/s^2$ y entonces se obtendría por resultado:

$$g \approx (980 \pm 1)\ cm/s^2$$

Teniendo en cuenta la influencia de cada uno de los errores, tanto sistemáticos como de apreciación, y que se desea un valor final para el error relativo porcentual del 0.1%, el error relativo de g se puede expresar como:

$$e_g = e_L + 2e_T + e_{método} = 0.001$$

donde el error del método está relacionado con las aproximaciones realizadas para considerar al péndulo como puntual (ver Anexo).

⇒ PARTE I: Cálculo de la aceleración de la gravedad

- Armar el péndulo y medir su longitud varias veces. Calcular la longitud promedio del péndulo. *(La longitud del péndulo a emplear se toma desde el punto de suspensión hasta el centro geométrico del cuerpo).*
- Para minimizar los *errores sistemáticos* o de método:
  - i) Calcular la <u>amplitud de la oscilación</u> a utilizar si se quiere que el error relativo por considerar ángulos pequeños[1] sea de 0.0001:

    $$e_1 = \theta^2/8 = x^2/8L^2 = 0.0001$$

  - ii) Medir el <u>diámetro</u> de la esfera. Compararlo con el que debería tener el péndulo si se considerase las dimensiones físicas de la forma del cuerpo[2] con un error relativo de 0.0001:

    $$e_2 = I_{cm}/ML^2 = 0.0001$$

    donde para una esfera sólida $I_{cm} = (2/5)\,MR^2$.
- Medir el tiempo de una oscilación y calcular el número de oscilaciones, ***n***, necesarias para que el error relativo sea de 0.0002:

  $\Delta T = 0.0002\ T$ ⇒ *como el cronómetro tiene una apreciación de $\Delta t = 0.01\ s$ ⇒ $n = \Delta t/\Delta T$.*
- Medir el tiempo de las ***n*** oscilaciones. ***n*** debe ser número entero y mayor que el calculado.
- Calcular el período verdadero del péndulo: $T = t_{n\ oscilaciones}/n$.

[1] Ve Anexo, punto 3a).

[2] Ver Anexo, punto 3b).

- Calcular la aceleración de la gravedad con la fórmula:
$$g = 4\pi^2 L/T^2.$$
- Calcular el error relativo en el valor de g resultante de emplear la fórmula de propagación de los errores cuadráticos relativos a la expresión anterior en función de las magnitudes medidas (*errores de apreciación*):
$$(e_g)^2 = (e_L)^2 + (2e_T)^2 .$$
- Comparar este valor con el valor propuesto al inicio de la experiencia.
- Calcular el error absoluto en el valor de la aceleración de la gravedad: $E_g = e_g\, g$.
- Expresar el resultado de manera correcta.

⇒ PARTE II: Método gráfico

De la ecuación 1 se observa que existe una relación cuadrática entre la longitud y el período de oscilación del péndulo. Por lo tanto, la representación gráfica:

$$t^2 = f(L)$$

deberá ser una recta, de cuya pendiente se podrá obtener el valor de la aceleración de la gravedad.

Con el mismo péndulo de la parte anterior, variar su longitud y calcular, para cada una de ellas, la amplitud de las oscilaciones. Los valores de L serán 6 o 7, incluyendo la del péndulo de la sección anterior y con una longitud mínima no menor de 1 m:

- Medir el tiempo que tarda en realizar las *n* oscilaciones
- Tabular los valores de L, t y t^2 y trazar el gráfico (t^2-L).
- Determinar la pendiente de la recta, aplicando el método de los cuadrados mínimos.
- Calcular el valor de la aceleración de la gravedad.
- Calcular el error absoluto de *g*, teniendo en cuenta el error cometido en la determinación de la pendiente de la recta.
- Expresar correctamente el resultado.

RESULTADOS

⇒ PARTE I: Cálculo de la aceleración de la gravedad

Tabla 1: Medidas de la longitud del péndulo

N° ensayo	**L (cm)**
Ensayo 1	
Ensayo 2	
Ensayo 3	
Ensayo 4	
Ensayo 5	
Promedio	

E_L = ______________

Amplitud de oscilación “x” calculada = ______________

Radio determinado para péndulo esférico = ________________

Diámetro péndulo esférico medido “D” = ________________ ; E_D = ______________

⇒ Radio péndulo esférico medido = ________________ ; E_R = ______________

Tiempo de una oscilación: t = ______________ ; E_t = ______________

Número ***n*** de oscilaciones necesarias: ***n*** = __________

Tiempo de las ***n*** oscilaciones: $T_n = nt$ = ______________ Periodo de oscilación: t = _____________

⇒ **PARTE II: Método gráfico**

Tabla 2: Medidas de la longitud y de las *n* oscilaciones por cada longitud del péndulo

N° ensayo	**L (cm)**	**T_n (s)**	**t (s)**	**t^2 (s^2)**
Ensayo 1				
Ensayo 2				
Ensayo 3				
Ensayo 4				
Ensayo 5				
Ensayo 6				
Ensayo 7				

E_L = _____________ ; E_t = _____________ ; E_t^2 = _____________

ANÁLISIS DE RESULTADOS

- Comparar los valores obtenidos en ambas partes del trabajo, calculando el error relativo entre ambos y entre cada uno de ellos con el valor esperado de g = 980 cm /s^2.
- Mostrar que se han minimizado los errores sistemáticos.
- Discutir los resultados.
- Si lo cree necesario, proponer mejoras a la experiencia propuesta.

CONCLUSIONES

ANEXO: ¿CÓMO HACER QUÉ UN PÉNDULO FÍSICO SEA UN PÉNDULO IDEAL?

Es realmente imposible conseguir un cuerpo puntual para suspender de una cuerda inextensible y sin peso para formar el péndulo "ideal" que oscile con movimiento armónico simple, pero es posible determinar las mínimas dimensiones del cuerpo para lograrlo. Para ello hay que seguir los siguientes pasos:

1º) El período de oscilación de un péndulo cuando la amplitud angular no es pequeña se expresa como:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\operatorname{sen}^2\theta + \cdots\right) \qquad (2)$$

mientras que para el caso de un cuerpo de dimensiones finitas o péndulo físico es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{MLg}} \qquad (3)$$

donde I_o es una magnitud física que depende de la forma del cuerpo y del tipo de cuerda o alambre.

2º) Para conseguir el valor para error porcentual pretendido se debe tener en cuenta que las ecuaciones (1) – (3) darían el valor para la aceleración de la gravedad "g" de manera distinta:

i) de la ecuación para el péndulo ideal: $g_c = (4\,\pi)^2(L/T^2)$
ii) de la ecuación que tiene en cuenta la amplitud: $g_\theta = (4\,\pi)^2(L/T^2)\,(1 + 1/16\ \mathrm{sen}^2 + \ldots)^2$.
iii) de la ecuación para un péndulo físico: $g_I = (4\,\pi)^2(L/T^2)\,(I_o/ML^2)$

3º) Aplicando la definición de error relativo y teniendo en cuenta que se quiere emplear la ecuación 1, se tienen los *errores sistemáticos* (o de método) al considerar:

a) Pequeñas amplitudes:

$$e_{(1)} = \frac{g_\theta - g_c}{g_c} = \left[\left(1 + \frac{1}{16}\operatorname{sen}^2\theta\right)^2 - 1\right]$$

de modo que desarrollando el cuadrado del binomio, reduciendo y considerando que $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ y usando que $x \approx \theta L$, se llega a que:

$$e_{(1)} = \theta^2/8 = x^2/8L^2$$

b) La forma del cuerpo:

$$e_{(2)} = \frac{g_I - g_c}{g_c} = \left(\frac{I_0}{ML^2} - 1\right)$$

y teniendo en cuenta que la cantidad I_o que aparece se expresa como: $I_o = I_{cm} + ML^2$, queda la expresión para el error relativo:

$$e_{(2)} = I_{cm}/ML^2$$

4º) Aplicando la propagación de los errores a la fórmula $g_c = (4\,\pi)^2\,(L/T^2)$, resultan los llamados *errores de apreciación* (o por el uso de los instrumentos de medición):

$$e_{(0)} = e_{(L)} + 2e_{(T)}$$

5º) La suma de los errores relativos *sistemáticos* y *de apreciación* dará el error relativo buscado:

$$e_{(0)} = e_{(L)} + 2e_{(T)} + e_{(método)} = e_{(L)} + 2e_{(T)} + e_{(1)} + e_{(2)}$$

6º) Se elige una esfera, (por su simetría), suspendida de una cuerda de longitud $L_0 > 2$ m.

***Ejemplo de aplicación*:**

Se elige un cuerpo esférico, (por su simetría), y se lo suspende de una cuerda de longitud $L_0 > 2$ m. Se la deja oscilar varias veces para luego determinar el periodo de una <u>sola</u> oscilación.

Teniendo en cuenta la influencia de cada uno de los errores sobre el valor final deseado, para un error relativo porcentual del 0.1%:

$$e_g = e_0 + e_1 + e_2 = e_L + 2e_T + e_1 + e_2 = 0.001$$

Entonces, el error relativo *no cuadrático* resulta en la ecuación:

$$e_g = (\Delta L/L) + 2(\Delta T/T) + (x^2/8L^2) + I_{cm}/ML^2$$

Si se dan los valores para cada uno de ellos, será posible convertir un péndulo real en un péndulo ideal y entonces calcular el valor de la aceleración con la ecuación (1) y con el error propuesto. Sean entonces:

i) $e_L = 0.0002 = \Delta L/L$

ii) $2e_T = 0.0004 = 2(\Delta T/T)$

iii) $e_1 = 0.0001 = {}^2/8 = x^2/8L^2$

iv) $e_2 = 0.0001 = I_{cm}/ML^2$, siendo:

- Para una esfera sólida: $I_{cm} = (2/5)\ MR^2$, donde R = radio
- Para un cilindro sólido: $I_{cm} = (1/12)\ M H^2 + (1/4)\ MR^2$, donde R = radio y H = altura.

Utilizando una cinta métrica de apreciación $A_L = 1$ mm, un cronómetro de apreciación $A_T = 0.01$ s, para $L_0 = 2$m y T = 2.80 s, y usando los valores propuestos para los errores relativos, resulta que:

i) ΔL = 0.0002, L = 0.0002 (2 m) = 0.0004 m, => ΔL = 0.4 mm

=> se debería medir varias veces la longitud del péndulo y promediar los valores para reducir la influencia de este error.

ii) ΔT = 0.0002, T = 0.0002 (2.8 s) = 0.00054 s., => ΔT ≈ 0.0006 s

=>como se tiene un cronómetro con una apreciación Δt = 0.01 s, se deberían medir:

n = Δt/ΔT = 0.01/0.0006 ≈ 20 oscilaciones.

NOTA: Si se hubiera elegido un cronómetro con una apreciación Δ*t* = 0.2 s, se deberían medir:

n = Δt/ΔT = 0.2/0.0006 ≈ 340 oscilaciones.

Por tanto, a mayor Apreciación del cronómetro, menor el número de oscilaciones a medir y viceversa.

iii) $x^2 = 0.0001\ (8L^2) = 0.0001\ (8 \cdot 2^2\ m^2)$, $x^2 = 3.2\ 10^{-3}\ m^2$ => $x \approx 0.056$ m.

=> la amplitud de la oscilación debería ser $x \leq 0.056$ m ≈ 0.060 m = 6.0 cm.

iv) $I_{cm} = (2/5)\ MR^2 = 0.0001\ (ML^2)$ => $R^2 = 0.0001\ L^2\ (5/2)$ => $R \leq 0.030$ m.

=> el radio de la esfera debería ser $R \leq 0.030$ m = 3.0 cm.