Guía 0 – Herramientas básicas de matemática y física

1) Sean los vectores $\vec{u} = (3,-2,5)$ y $\vec{v} = (5,7,-3)$, calcular:
   a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$
   b) $\vec{u} \times \vec{v}$
   c) $\vec{u} + \vec{v}$
   d) $5\vec{u} - 3\vec{v}$

Indicar en cada caso si el resultado es un vector ó un escalar.

2) Calcular las siguientes integrales:
   a) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2 sen(\theta)\, d\theta d\varphi$
   c) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^5 sen(\theta)\, d\theta d\varphi$
   b) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} r'^2\, sen(\theta) dr' d\theta d\varphi$
   d) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} r'^5\, sen(\theta) dr' d\theta d\varphi$

El resultado de c), ¿es equivalente a considerar el resultado de a) multiplicado por r^3? Justificar. El resultado de d), ¿es equivalente a considerar el resultado de b) multiplicado por r^3? Justifica.

3) Si $\vec{F}$ es un vector uniforme (independiente de *r*), demostrar que se verifica: $\nabla(\vec{F} \cdot \vec{r}) = \vec{F}$

4) ¿Es $\nabla \times \vec{F}$ necesariamente perpendicular a $\vec{F}$ para cualquier campo vectorial $\vec{F}$? Justificar la respuesta.

5) Sea el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$. Demostrar que:
   a) La divergencia de $\vec{F}$ es igual a 3.
   b) El rotor de $\vec{F}$ es nulo.

Calcular el flujo de $\vec{F}$ a través de una esfera de radio R con el centro en el origen de coordenadas. (Ayuda: Aplicar el Teorema de la Divergencia).

6) Dado el campo vectorial $\vec{F} = ar\, \breve{u}_r$ (en coordenadas esféricas).
   a) Pasarlo a coordenadas cilíndricas.
   b) Mostrar que se cumple el Teorema de Gauss para un cilindro recto de radio **R** que se extiende de z=0 a z=L y es simétrico alrededor del eje OZ.

7) Comprobar el teorema de Stokes siendo $\vec{F} = (2x - y)\hat{\imath} - yz^2\hat{\jmath} - y^2z\,\hat{k}$, S la superficie semiesférica que determina el plano *xy* al cortar a la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, y la curva cerrada C la circunferencia en que S se apoya. Calcular la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de C.

8) Transformación de una integral de superficie en otra más sencilla usando el Teorema de Stokes: Utilizar el Teorema de Stokes para evaluar la integral del rotacional del campo vectorial $\vec{F} = xyz\,\hat{\imath} + xy\,\hat{\jmath} + x^2yz\,\hat{k}$ sobre el dominio S consistente en la unión de la parte superior y de la cuatro caras laterales (pero no el fondo) del cubo con vértices (±1; ±1; ±1), orientado hacia afuera.

9) Para la función vectorial $\vec{A} = (4xy - 3x^2z^2)\,\hat{\imath} + 2x^2\,\hat{\jmath} - 2x^2z\,\hat{k}$ demostrar que la integral $\int_c \vec{A} \cdot \vec{dl}$ es independiente de la trayectoria C que va de P a Q (siendo P y Q fijos). Demostrar que existe una función derivable φ, que verifica que $\vec{A} = -\nabla\varphi$ y hallar su expresión.

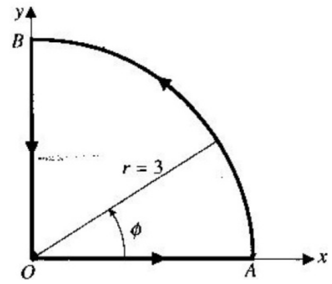
10) Determinar las constantes a, b y c de forma que el vector $\vec{V} = (x + 2y + az)\hat{\imath} + (bx - 3y - z)\hat{\jmath} + (4x + cy + 2z)\hat{k}$ sea irrotacional.

Demostrar que $\vec{V}$ puede expresarse como un gradiente de una función escalar y hallar esa función.

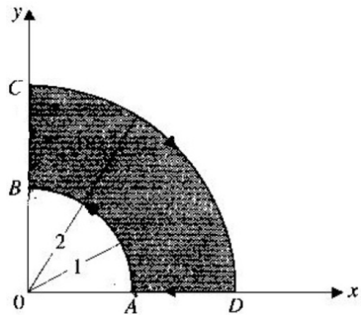
11) Una función vectorial $\vec{E}$ puede derivarse como el gradiente negativo de un potencial escalar V, es decir, $\vec{E} = -\nabla V$. Determine E en el punto (1,1,0) si
   a) $V = V_o\, e^{-x} \sin\left({}^{\pi y}/_{4}\right)$
   b) $V = E_o \cos(\theta)$

12) Sobre una partícula actúa la fuerza $\vec{F} = x^2\hat{\imath} + 3xy\hat{\jmath}$. Calcule el trabajo realizado por la fuerza al desplazar la partícula desde el punto **A**(0,0) al **B**(2,4):
   a) Si la trayectoria es una línea recta que une ambos puntos.
   b) Si la trayectoria es la parábola $y = x^2$
   c) Discutir si esta fuerza es o no conservativa.

13) Dado un campo vectorial $\vec{F} = xy\hat{\imath} - 2x\hat{\jmath}$, encuentre su circulación alrededor de la trayectoria ABOA mostrada en la figura.



14) Considere una función vectorial $\vec{F} = 5r\sin(\varphi)\,\hat{e}_r - r^2\cos(\varphi)\,\hat{e}_\varphi$
   a) Calcule $\oint \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}$ a lo largo del contorno ABCD en la dirección indicada en la figura.
   b) Calcule el $\nabla \times \vec{F}$
   c) Calcule el $\int (\nabla \times \vec{F})\, \overrightarrow{ds}$ sobre el área sombreada y compare el resultado que obtuvo en el inciso a).



15) Una partícula se encuentra en el plano xy bajo la acción de una fuerza conservativa $\vec{F} = 2y\hat{\imath} + 2x\hat{\jmath}$. Deducir:
   a) El trabajo realizado por esta fuerza cuando la partícula se desplaza desde el punto A(x,y) a B(0,0).
   b) La energía potencial U(x,y) asociada a la partícula en un punto cualquiera del plano A(x,y).