VIII. Fuerza y campo electrostáticos

69. **Entre dos placas uniformemente cargadas, con densidades de signo contrario, existe un campo electrostático uniforme. Un electrón abandona, partiendo del reposo, la placa cargada negativamente y choca con la positiva, que dista $d = 2$ cm de la anterior, al cabo de $1,5 \times 10^{-8}$ s. Calcular la intensidad del campo electrostático, así como la velocidad cuando llega a la segunda placa.** $(e/m_e = 1,76 \times 10^{11} C/kg)$

Solución: La energía total del electrón debe conservarse

$$E = U + E_c = \frac{1}{2} m_e v^2 + qV$$

Entre las placas existe un campo de sentido contrario al movimiento del electrón, por lo que éste será acelerado por una fuerza $e\mathbf{E}$. Tendremos que, si V_1 y V_2 son los potenciales de las placas negativa y positiva, respectivamente,

$$\frac{1}{2} m_e (v_2^2 - v_1^2) = q(V_1 - V_2)$$

que se transforma en

$$\frac{1}{2} m_e v_2^2 = e(V_1 - V_2)$$

al ser $v_1 = 0$, pues parte del reposo, y $q = -e$

Para calcular la intensidad del campo tenemos en cuenta:

$$F = eE = m_e a \qquad , \qquad a = \frac{e}{m_e} E$$

El electrón se mueve con movimiento uniformemente acelerado, por tanto

$$a = 2d/t^2 = 1,78 \times 10^{14} \text{m s}^{-2}$$

La intensidad del campo será

$$E = a(m_e/e) = 1,01 \times 10^3 \text{N C}^{-1}$$

Para calcular la velocidad final a través de la expresión de la conservación de la energía, necesitamos la diferencia de potencial entre las placas

$$E = -\frac{dV}{dx} \qquad , \qquad (V_1 - V_2) = Ed = 20,2\text{V}$$

Lo que nos permite calcular la velocidad y obtener $v = 26,67 \times 10^5 \text{ms}^{-1}$

70. El sistema de la figura está formado por un condensador de placas plano-paralelas, cargado con densidad superficial de carga σ, de una de cuyas placas cuelga una esfera conductora con carga Q y masa m. En la posición de equilibrio el hilo del que cuelga la esfera forma un ángulo de 30^o con la vertical. Calcular: a) la tensión del hilo, b) la densidad de carga en cada placa.

Datos: $m = 10^{-10}$ K; $Q = 10^{-15}$ C; $\epsilon_o = 8,85 \times 10^{-12}$ C^2/Nm^2.

Solución:

a) En la posición de equilibrio existen tres fuerzas que actúan sobre la esfera: la tensión del hilo, el peso de la esfera y lafuerza de repulsión electrostática, y las tres fuerzas están en equilibrio. Por lo tanto, escribiendo la condición de equilibrio, en la dirección del hilo, y despejando T, obtenemos:

$$T = F_e sen\alpha + mgcos\alpha = \frac{Q\sigma}{\epsilon_o} sen\alpha + mgcos\alpha$$

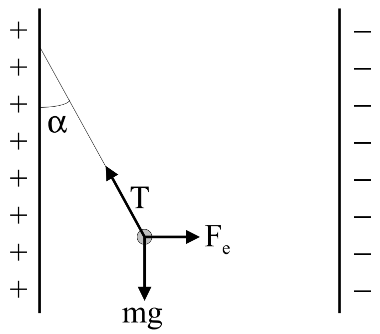

Figura 39: Problema 71.

b) Por otro lado, la condición de equilibrio en la dirección perpendicular al hilo nos da:

$$F_e cos\alpha = mgsen\alpha$$

de donde obtenemos:

$$tg\alpha = \frac{Q\sigma}{mg\epsilon_o}$$

y, por lo tanto,

$$\sigma = \frac{mg\epsilon_o tg\alpha}{Q} = 5,011 \times 10^{-6} C/m^2$$

71. Dos placas metálicas de 100 cm^2 de área están separadas 2cm. La carga sobre la placa de la izquierda es $-2 \times 10^{-9}C$ y la carga de la placa de la derecha es $-4 \times 10^{-9}C$. Se pide: a) Calcular el campo inmediatamente a la izquierda de la placa de la izquierda; b) el campo entre las placas; c) el campo inmediatamente a la derecha de la placa de la derecha; d) la diferencia de potencial entre las placas.

Solución:

a) El módulo del campo creado por una distribución plana de carga con densidad de carga σ es $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_o}$ y como a la izquierda de la placa de la izquierda el sentido de los campos creados por ambas placas es idéntico y hacia la derecha tenemos:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_o} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_o} = \frac{q_1 + q_2}{2S\epsilon_o} = 3,39 \times 10^4 V/m$$

b) En este caso los dos campos tienen sentidos opuestos y por lo tanto

$$E_2 = \frac{q_2 - q_1}{2S\epsilon_o} = 1,13 \times 10^4 V/m$$

c) En este caso los dos campos tienen idéntico sentido pero opuesto al del apartado a). Por lo tanto

$$E_3 = \frac{-(q_1 + q_2)}{2S\epsilon_o} = -3,39 \times 10^4 V/m$$

d) Como el campo entre las placas es uniforme, el potencial será:

$$V_2 - V_1 = E_2 d = 226V$$

72. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno el electrón se mueve en una órbita circular de radio r alrededor del protón fijo. a) Hallar una expresión de la energía cinética del electrón en función de r. Demostrar que a una distancia cualquiera r la energía cinética es la mitad del valor de la energía potencial. b) Calcular los valores de las energías cinética y total del electrón para $r = 0,529 \times 10^{-10}$m ($q_e = 1,602 \times 10^{-19}$ Culombios, $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$Kg.) c) ¿Cuánta energía debe suministrarse al átomo de hidrógeno para ionizarlo, es decir, para llevar el electrón al infinito con energía cinética nula?

Solución:

a) Primeramente escribiremos la condición de estabilidad de la órbita, que es el equilibrio entre fuerza de atracción electrostática y fuerza centrífuga:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

de donde se puede despejar v^2 y sustituir posteriormente en la expresión para la energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_o r}$$

Por otra parte la energía potencial del electrón es:

$$V = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_o r}$$

con lo que se demuestra lo pedido en el apartado a).

b) Para la energía total tenemos:

$$E = E_c + V = E_c - 2E_c = -E_c = -1,07 \times 10^{-18} J$$

mientras que $E_c = 2,14 \times 10^{-18} J$

c) Para ionizar un átomo de hidrógeno es necesario aportar una energía igual a su energía total E, ya que en el infinito su energía potencial es nula y como la cinética también debe serlo, basta con llevarlo a un estado de energía total nula, luego: $E^* = -E = 1,07 \times 10^{-18}$ J.

73. Las placas de un condensador plano tienen un área A y están separadas una distancia d, estableciéndose entre ellas una diferencia de potencial V. a) Si introducimos entre las placas (véase figura) una lámina metálica de espesor x, ¿cuál es la nueva capacidad del condensador? b) ¿Cuál es la nueva diferencia de potencial entre las placas? c) Si $A = 30\ cm^2$, $d = 5$ mm, $V = 1.000$ V, $x = 3$ mm y $\epsilon_o = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m ¿cuáles son los valores numéricos de la capacidad y la diferencia de potencial después de introducir la lámina?

Solución:

a) Supongamos que la carga de las placas del condensador antes de introducir la lámina metálica es q. Al colocar la lámina metálica en esta aparece una carga +q frente a la placa cargada negativamente y una carga -q frente a la placa cargada positivamente. Por lo tanto es como si tuviéramos dos condensadores iguales en serie, cuya capacidad sería:

$$C_1 = C_2 = \frac{q}{V} = \frac{\epsilon_o A}{(d-x)/2}$$

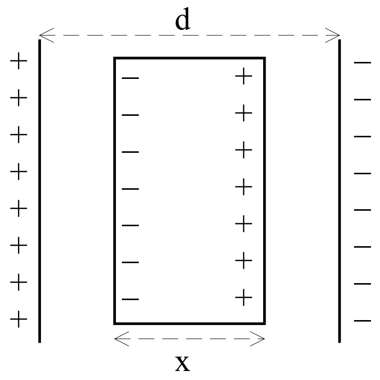

Figura 40: Problema 74.

por lo tanto la capacidad del nuevo condensador será la capacidad equivalente a la combinación en serie de los dos nuevos condensadores:

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{2}{C_1}$$

con lo que

$$C' = \frac{\epsilon_o A}{d-x}$$

b) La nueva diferencia de potencial entre las placas será la suma de las que hay en C_1 y C_2:

$$V' = \frac{2q}{C_1} = \frac{V(d-x)}{d}$$

c) $C' = 3,98 \times 10^{-12}$ Faradios; $V' = 400$ Voltios.

74. **Calcular la capacidad equivalente del circuito de la figura, con $C_1 = C_2 = 2\ \mu$F, y$C_3 = 6\ \mu$F. Si se aplica al conjunto una diferencia de potencial $V_0 = 10$V, calcular: a) la carga de C_1, b) la diferencia de potencial a través de C_1, c) la carga de C_2 y C_3.**

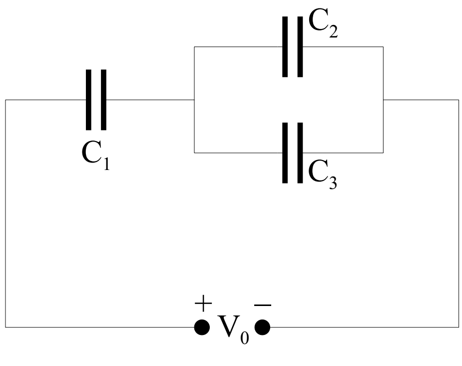

Figura 41: Problema 75.

Solución: Se trata de una asociación de condensadores en la que dos (C_2 y C_3) se encuentran en paralelo y el tercero (C_1) en serie con el condensador equivalente de los dos anteriores. La capacidad de este último será

$$C'_e = C_2 + C_3 = 8\mu F$$

mientras que la capacidad equivalente total

$$C_{e,T} = \frac{C'_e C_1}{C'_e + C_1} = 1,6\ \mu F$$

a) Al aplicar una diferencia de potencial de 10V y una vez los condensadores se han cargado al valor final que pueden adquirir con dicha diferencia de potencial; es decir, cuando el circuito ha adquirido su régimen estacionario:

$$Q_1 = Q'_e,$$

por estar en serie

$$V_0 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q'_e}{C'_e} = Q_1 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C'_e} \right) = Q_1 \frac{C'_e + C - 1}{C_1 C'_e}$$

En la última expresión hemos hecho uso de la descomposición de V_0 en suma de la existente entre los extremos de C_1 y la que hay entre los de C'_e. Sustituyendo los valores numéricos dados: $Q_1 = 16\ \mu$C.

b) La diferencia de potencial a través de C_1 vale:

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = 8\text{V}$$

.

c) La suma de cargas de C_2 y C_3 es igual a 16 μC. Como ambos tienen entre sus placas la misma diferencia de potencial, al estar conectados en paralelo,

$$\left. \begin{array}{l} Q_2 + Q_3 = 16 \\ V = Q_2/C_2 = Q_3/C_3 \end{array} \right\} \quad Q_2 = 4\ \mu C, \quad Q_3 = 12\ \mu C$$

75. **Se elimina del circuito del problema anterior el condensador C_2, quedando solo C_1 y C_3 en serie. Al conjunto de ellos se le aplica una diferencia de potencial $V_0 = 10$V. a) ¿Qué energía se almacena en cada condensador? Supongamos que se desconectan de la fuente V_0 y se vuelven a conectar los condensadores en paralelo, b) ¿qué carga final adquiere cada uno de ellos? c) ¿Qué energía está almacenada, en estas circunstancias, en cada condensador? d) Comparar las respuestas obtenidas en los apartados a) y c) y dar una interpretación, desde un punto de vista físico, de las diferencias que puedan existir.**

Solución: a) Al eliminar del circuito C_2, quedará $Q_1 = Q_3$, y la energía almacenada en cada condensador valdrá

$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} \quad , \quad U_3 = \frac{1}{2}\frac{Q_3^2}{C_3}$$

Para calcular Q_1 o Q_3, determinamos previamente la capacidad equivalente en cada caso:

$$C^*_{equiv} = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} = 1,5\ \mu F$$

$$Q_1 = C^*_{equiv} V_0 = 15\ \mu C$$

Por lo tanto

$$U_1 = 56,25 \times 10^{-6}\text{J} \quad , \quad U_3 = 18,75 \times 10^{-6}\text{J}$$

b) Al desconectarlos de la fuente y conectarlos entre sí en paralelo, lo que hemos hecho estrictamente es unir las placas del mismo signo de cada uno de ellos entre sí, más que conectarlos en paralelo o en serie

(¿por qué?). Al hacer esta nueva conexión, es evidente que la diferencia de potencial entre los extremos de uno es igual a la que existe entre las placas del otro

$$\frac{Q_1^*}{C_1} = \frac{Q_3^*}{C_3} \quad , \quad \frac{Q_1^*}{Q_3^*} = 1/3$$

Además, la carga ha de conservarse respecto de la situación anterior:

$$Q_1^* + Q_3^* = 2Q_1 = 30\,\mu C$$

por lo tanto $Q_1^* = 7,5\mu$C y $Q_3^* = 22,5\,\mu$C.

c) La energía almacenada en cada uno de los condensadores es fácil de calcular con las formulas del apartado a), y viene dada por $U_1^* = 14,06 \times 10^{-6}$ J, $U_3^* = 14,06 \times 10^{-6}$ J.

d) Comparando los resultados de los apartados a) y c), se observa que $U_1 + U_3 > U_1^* + U_3^*$; la energía almacenada por el sistema de condensadores ha disminuido al pasar de una situación a otra. La energía no puede desaparecer, solo se puede transformar de una forma a otra. No es posible que se haya disipado en calor al producirse la redistribución de cargas en los condensadores como consecuencia de la reconexión del apartado b), ya que hemos supuesto implícitamente que no existen elementos resistivos en el circuito. Con esta hipótesis, la única posibilidad es que la diferencia de energías potenciales entre las dos configuraciones se haya transferido en forma de radiación electromagnética al medio que rodea el circuito. En la realidad siempre existen elementos resistivos y, por tanto, una cierta disipación de energía en forma de calor, al producirse el reajuste de carga en los condensadores; pero también existe el mecanismo de radiación para transferir parte de estas diferencias de energía al medio, en forma de onda electromagnética.

76. Dos cargas puntuales de $5\ \mu C$ y $-10\ \mu C$, se encuentran situadas en un plano vertical y separadas una distancia de $1m$. Se pide: a) Calcular el valor del campo eléctrico y su dirección en un punto del plano situado a $0,6m$ de la primera carga y a $0,8m$ de la segunda y por encima de ambas. b) Calcular los puntos en los cuales el campo eléctrico es nulo. c) Encontrar las coordenadas del punto situado en la línea que une las cargas en el cual los campos creados por las dos cargas son idénticos en módulo, dirección y sentido.

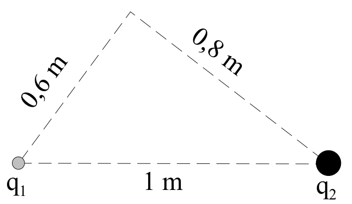

Figura 42: Problema 77.

Solución:

a) Para resolver este primer apartado basta utilizar la expresión del campo eléctrico creado por una carga puntual. Las expresiones se simplifican mucho si se hace uso del hecho de que los puntos donde están situadas las cargas y el punto donde se pide calcular el campo forman un triángulo rectángulo. Si designamos con subíndice 1 a la carga de $5\mu C$ y con subíndice 2 a la carga de $-10\mu C$, las expresiones resultantes para las componentes del campo eléctrico creado por cada una de las cargas son:

$$E_{x1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1 cos\alpha}{R_1^2} = 7,5 \times 10^4 N/C$$

$$E_{y1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1 sen\alpha}{R_1^2} = 10^5 N/C$$

$$E_{x2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_2 cos\beta}{R_2^2} = 45/4 \times 10^4 N/C$$

$$E_{y2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_2 sen\beta}{R_2^2} = -27/32 \times 10^5 N/C$$

Donde R_1 y R_2 indican las distancias respectivas de las cargas al punto donde se calcula el campo y α y β los ángulos formados con la horizontal por las rectas que unen a cada carga con el punto.

Utilizando el principio de superposición de campos, las componentes del campo total se calculan como la suma de las componentes de los campos creados por cada carga.

$$E_x = 75/4 \times 10^4 N/C; \quad E_y = 50/32 \times 10^4 N/C$$

Teniendo ya las componentes totales del campo, el módulo del campo y el ángulo que forma el campo con la horizontal se calculan de la manera habitual:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 1,88 \times 10^5 N/C; \quad tg\gamma = \frac{E_y}{E_x} = 1/12$$

b) Para que el campo se anule se tiene que cumplir que los campos creados por la dos cargas sean de igual módulo, igual dirección y sentido contrario. La condición de que tengan la misma dirección tiene como consecuencia que el campo sólo se puede anular en puntos situados sobre la recta que une las dos cargas.

La condición de que los campos tengan igual módulo se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_2}{(x-1)^2}$$

donde x es la distancia del punto buscado a la carga q_1. Esta relación nos da una ecuación de segundo grado:

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

cuyas soluciones son $x_1 = -2,41m$, y $x_2 = 0,41m$. Para x_1 el punto está situado a la izquierda de q_1, luego los dos campos tendrán sentido contrario y se anularán, luego esta es la respuesta buscada.

Sin embargo, para x_2 el punto está situado entre las dos cargas y los campos tendrán el mismo sentido, con lo que la respuesta a la pregunta c) es $x_2 = 0,41m$.

77. En la figura se proyecta un electrón en la dirección del eje horizontal y con una velocidad inicial de $v = 2 \times 10^7\ ms^{-1}$ entre las placas de un condensador, entre las que hay un campo eléctrico dirigido hacia arriba de intensidad 20.000 N/C. a) Calcular la separación del electrón respecto al eje horizontal a la salida de las placas. b) ¿Qué ángulo formará la velocidad del electrón con la horizontal a la salida de las placas? c) ¿A qué distancia del eje horizontal alcanzará el electrón una pantalla colocada a 12 cm de la salida de las placas?

Solución:

a) El movimiento del electrón entre las placas puede considerarse como un movimiento de tiro parabólico con la velocidad inicial indicada en el enunciado y una aceleración $\vec{a} = -\frac{eE}{m_e}\vec{j}$. Las ecuaciones de dicho movimiento serán, pués:

$$x = vt; \quad y = -\frac{1}{2}at^2$$

resolviendo este sistema para $x = x_o$, donde x_o es la coordenada horizontal del extremo de salida de las placas, se tiene

$$t_o = x_o/v; \quad y_o = -\frac{1}{2}\frac{eE}{m_e}\frac{x_o^2}{v^2} = -0,7cm$$

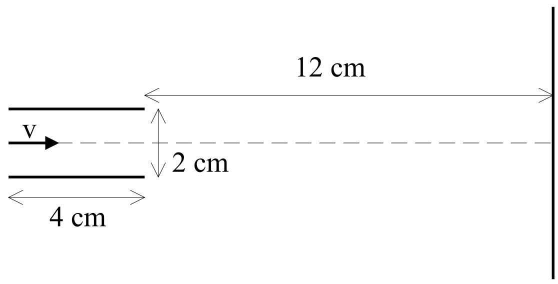

Figura 43: Problema 78.

.

b) Las componentes de la velocidad cumplen las ecuaciones $v_x = v$; $V_y = at$, de donde

$$tan\alpha = \frac{at}{v} = \frac{eE}{m_e}\frac{x_o}{v^2} = 0,35$$

c) A partir de la salida de entre las placas, el movimiento del electrón es uniforme y por lo tanto:

$$x_p = vt'; \quad y_p = -y_o + v_y t'$$

donde X_p es la distancia entre la salida de las placas y la pantalla. Resolviendo el sistema se tiene $t' = x_p/v$, e

$$y_p = -\frac{1}{2}\frac{eE}{m_e}\frac{x_o(x_o + x_p)}{v^2} = -2,8cm$$

.

78. **Cuatro cargas iguales Q se encuentran en los vértices de un cuadrado de lado L. Las cargas se van dejando en libertad una a una siguiendo el sentido de las agujas del reloj y de manera que se permite que cada carga alcance su velocidad final a una gran distancia del cuadrado antes de liberar la siguiente. ¿Cuál será la energía cinética final de (a) la primera carga liberada, (b) la segunda, (c) la tercera y (d) la cuarta?**

Solución:

Como el campo electrostático es conservativo, en el proceso de liberación y alejamiento de cada una de las cargas, la energía total se conserva, por lo que $\Delta E_c = -\Delta E_{pot} = -q\ \Delta V = q(V_i - V_f)$. Además, a una gran distancia tomamos el origen de potencial igual a cero, y como la energía cinética inicial también es nula tenemos finalmente $E_{cf} = qV_i$.

Para calcular V_i basta con sumar los potenciales electrostáticos creados por cada una de las cargas que no se han liberado todavía, de modo que obtenemos:

a)

$$E_{ci} = qV_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_o}(\frac{2q}{L} + \frac{q}{\sqrt{2}L\%}) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o L}(\frac{4+\sqrt{2}}{2})$$

b)

$$E_{ci} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o L}(\frac{2+\sqrt{2}}{2})$$

c)

$$E_{ci} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_o L}$$

d) La cuarta carga no se ve sometida a ningún potencial, luego permanecerá en reposo y, por lo tanto, su energía cinética final será nula.