Condensadores y Dieléctricos

Concepto de Capacidad.

Tipos de Condensadores.

Asociación de Condensadores.

Energía de un Condensador.

Condensador plano-paralelo con Dieléctrico.

Comportamiento microscópico de un Dieléctrico.

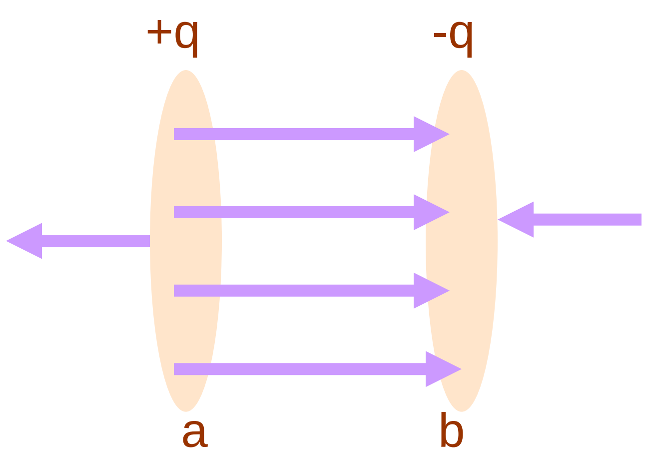
BIBLIOGRAFÍA

- Alonso; Finn. "Física ". Cap. 25. Addison-Wesley Iberoamericana.
- Gettys; Keller; Skove. "Física clásica y moderna". Cap. 23. McGraw-Hill.
- Halliday; Resnick. "Fundamentos de física". Cap. 30. CECSA.
- Roller; Blum. "Física". Cap. 29. Reverté.
- Serway. "Física". Cap. 26. McGraw-Hill.
- Tipler. "Física". Cap. 21. Reverté.

Concepto de Capacidad

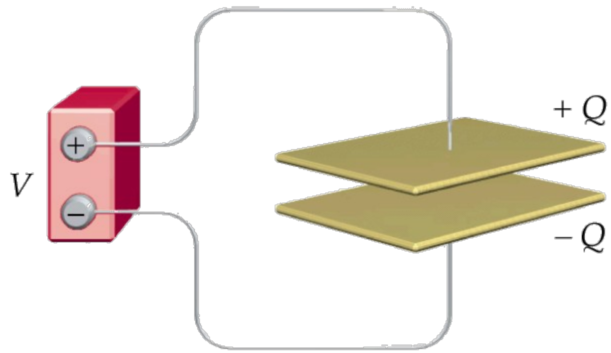
Utilidad: Almacenamiento de carga y energía en los circuitos. La propiedad que caracteriza este almacenamiento es la **Capacidad Eléctrica**.

Construcción de un Condensador: Dos conductores aislados (**placas**) de forma arbitraria, con cargas +q y –q.



Un Condensador se caracteriza por la carga de cualquiera de los conductores y por la diferencia de Potencial que existe entre ellos.

Cómo se Carga un Condensador: Conectando las dos placas a los terminales de una batería



De esta forma, los portadores de carga se mueven de una placa a otra hasta que se alcanza el equilibrio Electrostático. Así, la diferencia de Potencial entre las placas es la misma que entre los terminales de la batería.

La relación ente la Carga y el Potencial es una característica propia de cada Condensador, por lo que se define la **Capacidad** del Condensador como

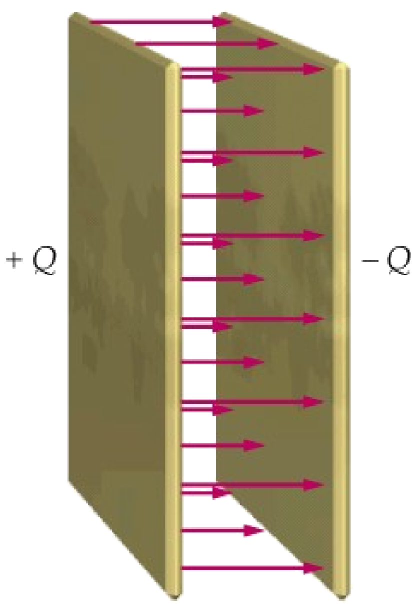
$$C = \frac{q}{V}$$

Unidades en el S.I.: **Faradio (F)**

Tipos de Condensadores

Vamos a calcular la capacidad para tres tipos de Condensadores. En cada caso debemos encontrar la diferencia de Potencial, V, entre las placas de dicho Condensador.

1.- Condensador de placas plano-paralelas



(a)

Suponiendo cada placa como un plano infinito, el Campo Eléctrico creado por cada placa es $\sigma/2\varepsilon_o$, luego el Campo total entre las placas es

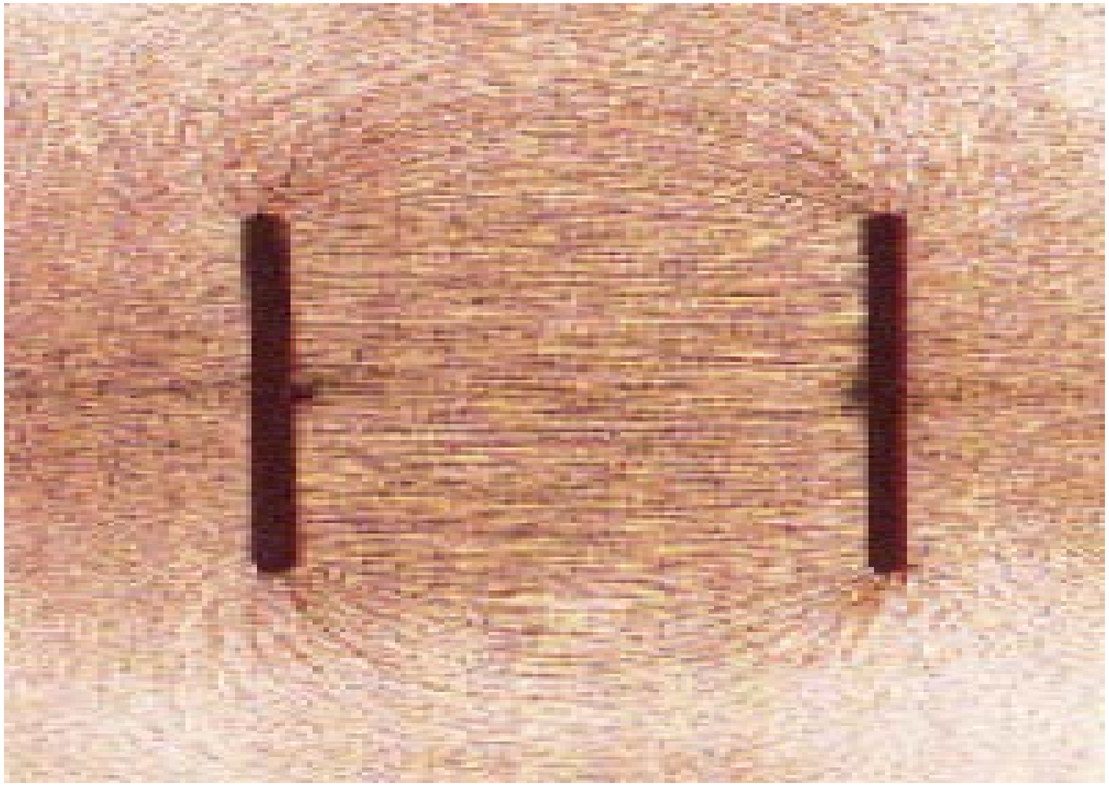
$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{}{\varepsilon_0} = \quad \text{y} \quad V = E\,d = \frac{q\,d}{\varepsilon_0\,A}$$

La capacidad será

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{q\,d/\varepsilon_0\,A}$$

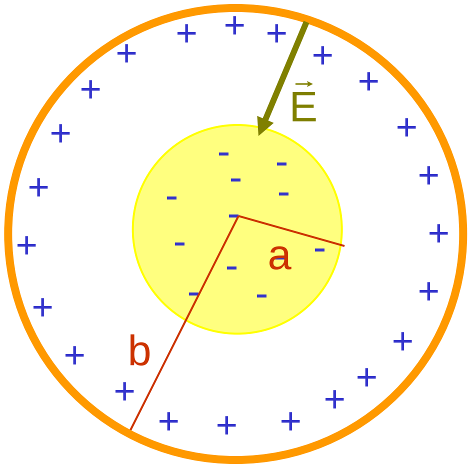
$$C = \frac{\varepsilon_0\,A}{d}$$

Líneas de Campo Eléctrico entre las placas de un Condensador



2.- Condensador Cilíndrico:

Se compone de un alambre de radio a y una corteza cilíndrica de radio b concéntrica con el alambre.



$$V = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Siendo E el Campo Eléctrico en la zona entre los dos conductores. Podemos calcular esta Campo Eléctrico aplicando el Teorema de Gauss.

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E\,2\pi r L = \frac{q_{int}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_o r L}$$

$$V = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_a^b E\,dr$$

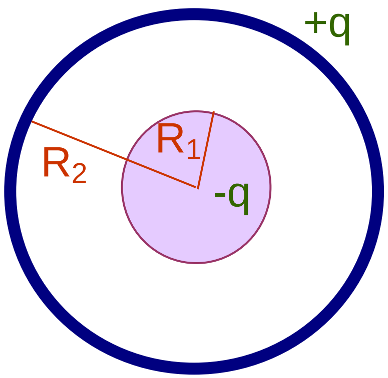
$$V = \frac{q}{2\pi\varepsilon_o L}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_o L}\ln\frac{b}{a}$$

$$C = \frac{q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_o L}{\ln(b/a)}$$

Cuanto mayor es la longitud del cilindro más carga es capaz de acumular

3.- Condensador Esférico:

Se compone de una esfera conductora interior de radio R_1 y una corteza esférica concéntrica de radio R_2.



Si suponemos que la esfera interior tiene carga negativa y la corteza está cargada positivamente, el Campo Eléctrico entre ambas, a una distancia r, será el de una Carga Puntual colocada en el centro.

$$V = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} E\,dr = \int_{R_1}^{R_2} k\frac{q}{r^2}dr = kq\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

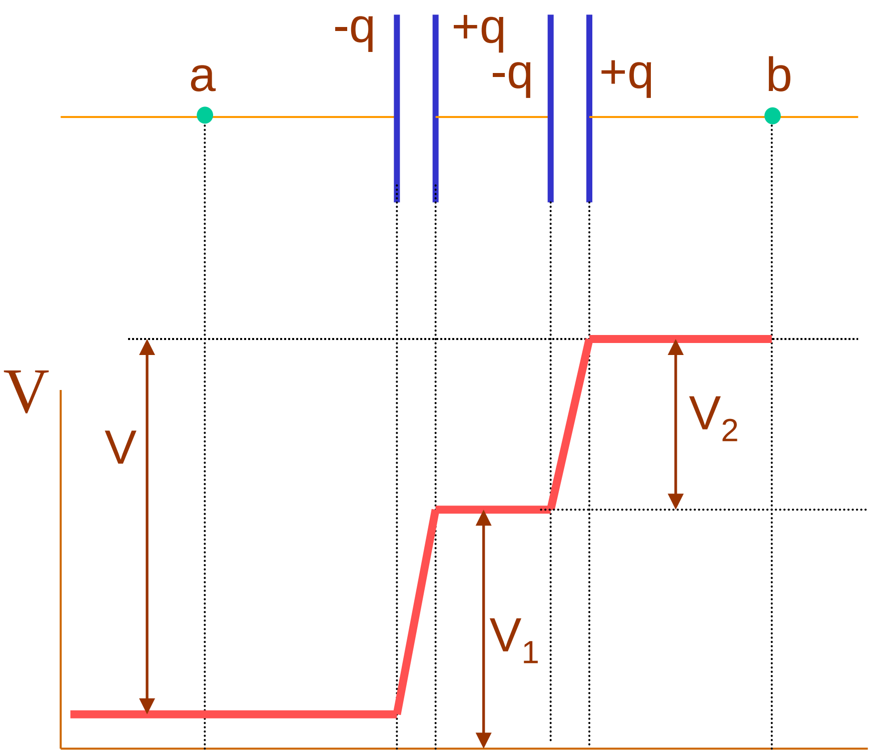
$$C = \frac{R_1 R_2}{k(R_2 - R_1)} = 4\pi\varepsilon_o R_1 \frac{R_2}{R_2 - R_1}$$

Si $R_2 \rightarrow \infty$ Se define la Capacidad de un Condensador esférico aislado como

$$C = 4\pi\varepsilon_o R$$

Asociación de Condensadores

Condensadores en serie



Regla general: La Diferencia de Potencial entre los extremos de un cierto número de dispositivos conectados en serie es la suma de las Diferencias de Potencial entre los extremos de cada dispositivo individual.

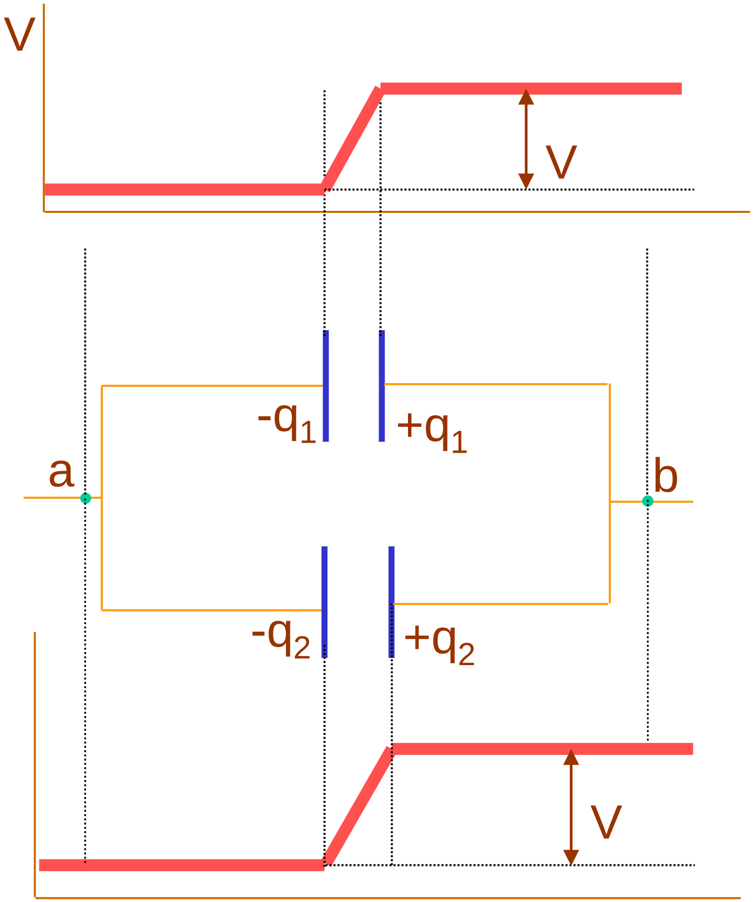
En este caso $V=V_b-V_a=V_1+V_2$ y la carga permanece constante, luego

$$V_1 = \frac{q}{C_1} \quad y \quad V_2 = \frac{q}{C_2} \qquad V = V_1 + V_2$$

$$V = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \Rightarrow C_{eq} = \frac{q}{V} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

Condensadores en Paralelo



Regla general: La Diferencia de Potencial entre los extremos de un cierto número de dispositivos conectados en paralelo es la misma para todos ellos.

En este caso $q = q_1 + q_2$ y es la Diferencia de Potencial la que permanece constante, luego

$$q_1 = C_1 V \quad y \quad q_2 = C_2 V \qquad q = q_1 + q_2$$

$$q = V(C_1 + C_2) \Rightarrow C = C_1 + C_2$$

$$C_{eq} = \sum_i C_i$$

Energía de un Condensador

Cuando se carga un Condensador con una batería, ésta realiza un trabajo al transportar los portadores de carga de una placa a otra. Esto supone un aumento de Energía Potencial en los portadores que coincide con la **Energía Eléctrica almacenada en el Condensador**. Se puede comparar este efecto con la Energía almacenada en un muelle comprimido. Esta Energía almacenada se recupera cuando se descarga el Condensador.

Si en un tiempo t se transfiere una carga q'(t) de una placa a otra, la ddp en este instante de tiempo será

$$V(t) = \frac{q'(t)}{C}$$

La transferencia de una carga extra dq', requiere un trabajo extra que vendrá dado por

$$dW = V(t)dq' = \frac{q'}{C}dq'$$

El proceso termina cuando toda la carga ha sido transferida y el sistema queda en equilibrio. El trabajo desarrollado en este proceso será

$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C}dq'$$

Este trabajo coincide con la Energía Eléctrica almacenada en el Condensador, luego

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

También se puede escribir como $U = \frac{1}{2}CV^2$ o $U = \frac{1}{2}qV$

Densidad de Energía: Se define como la cantidad de Energía por unidad de volumen.

Para un Condensador de placas planoparalelas

$$C = \frac{\varepsilon_o A}{d} \quad y \quad V = E\,d$$

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_o A}{d}E^2 d^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2 (Ad)$$

Volumen ocupado por el campo Eléctrico

Si en un punto del espacio (en vacío) existe un Campo Eléctrico, puede pensarse que también hay almacenada una cantidad de Energía por unidad de volumen igual a esta expresión

$$\eta_e = \frac{1}{2}\varepsilon_o E^2$$

Condensador Plano-paralelo con Dieléctrico

En 1837 Faraday investigó por primera vez el efecto de llenar el espacio entre las placas de un Condensador con un Dieléctrico (material no Conductor), descubriendo que en estos casos la Capacidad aumenta.

Si el Dieléctrico ocupa todo el espacio entre las placas, la Capacidad aumenta en un factor κ, a la que llamamos **Constante Dieléctrica**.

Introducción de un Dieléctrico entre las placas de un Condensador

Dado un Condensador plano-paralelo de capacidad C_o, se conecta a una pila con una diferencia de potencial V_o, de forma que la carga final que adquiere es $q_o = C_oV_o$.

I

Si se desconecta el Condensador de la pila y se introduce un dieléctrico que ocupe todo el espacio entre las placas, la Diferencia de Potencial disminuye en una cantidad κ, mientras que la carga permanece constante, luego

$$C = \frac{q_o}{V} = \frac{\kappa q_o}{V} = \kappa C_o$$

II

Si se introduce un Dieléctrico con la pila conectada, ésta debe suministrar una carga adicional para mantener el Potencial constante. La Carga total aumenta entonces en una cantidad κ, luego

$$C = \frac{q}{V_o} = \frac{\kappa q_o}{V_o} = \kappa C_o$$

Para un Condensador de placas plano-paralelas se puede escribir

$$C = \frac{\kappa \varepsilon_0 A}{d} = \frac{\varepsilon A}{d}$$

Este resultado se puede generalizar para cualquier tipo de Condensador escribiendo

$$C = \kappa \varepsilon_0 L$$

L es una constante que depende de la geometría

Planoparalelo $\Rightarrow$ $L = \frac{A}{d}$

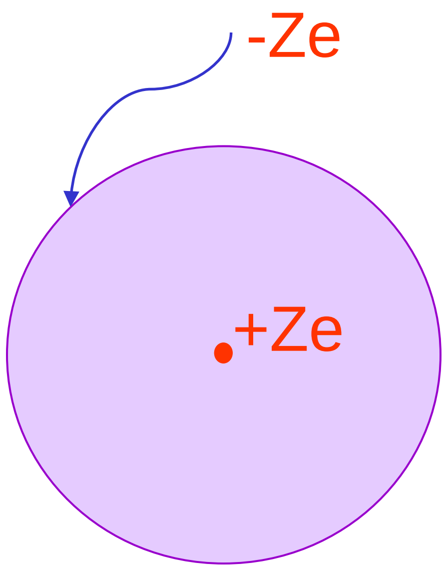
Cilíndrico $\Rightarrow$ $L = \frac{2\pi l}{\ln(b/a)}$

Comportamiento Microscópico de un Dieléctrico

Las ***Cargas Ligadas o Cargas de Polarización*** son las responsables de la disminución del Campo Eléctrico entre las placas de un Condensador cuando se introduce un Dieléctrico. Dichas Cargas se encuentran en la superficie del Dieléctrico.

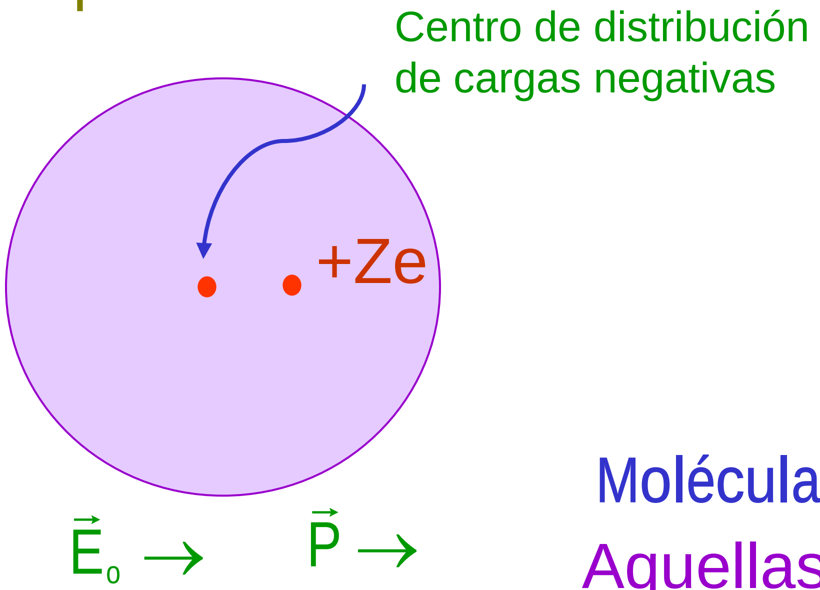
- Modelo Atómico simple

Una carga puntual +Ze rodeada por una distribución esférica de carga negativa –Ze formada por electrones



$\vec{E}_o = 0$ $\quad \vec{P} = 0$

Si sometemos el átomo en un campo externo, éste ejerce una fuerza en un sentido sobre el núcleo y en sentido opuesto sobre los electrones. Así, la posición del núcleo y del centro de distribución de las cargas negativas queda desplazado.

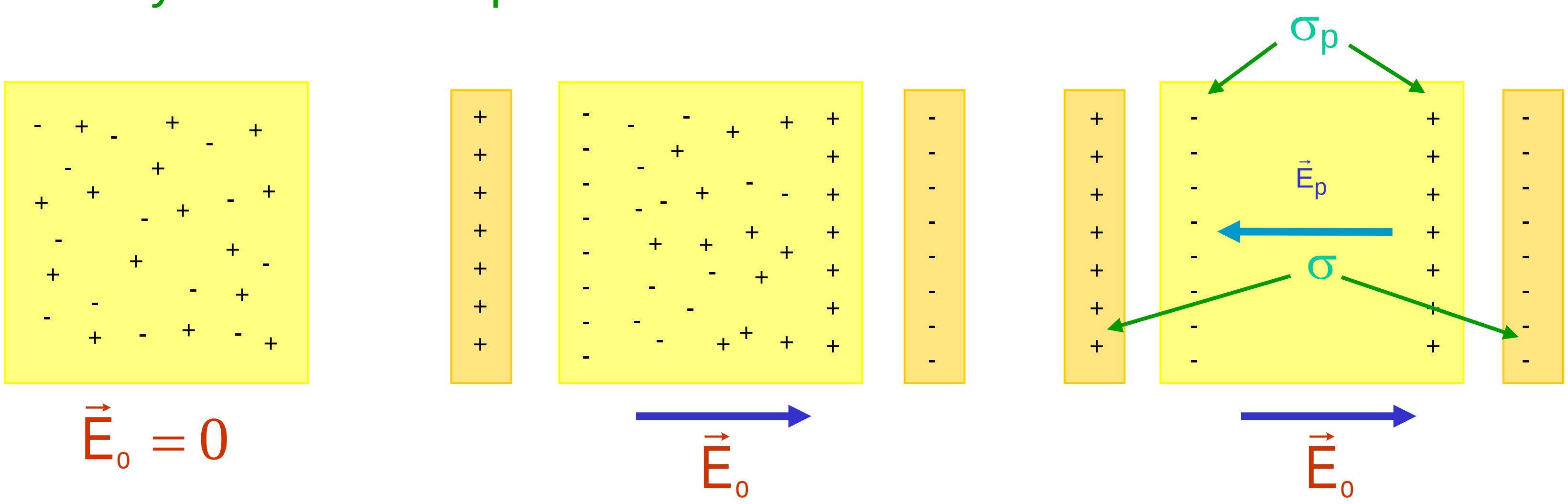


En este caso el átomo adquiere un momento dipolar inducido y entonces se dice que está polarizado.

Moléculas Polares

Aquellas que tienen un momento dipolar permanente (por ejemplo el agua).

Si colocamos un dieléctrico entre las placas de un Condensador plano-paralelo, se polariza a medida que se introduce en el seno del Condensador → Aparece una densidad superficial de Carga en las caras adyacentes a las placas del Condensador



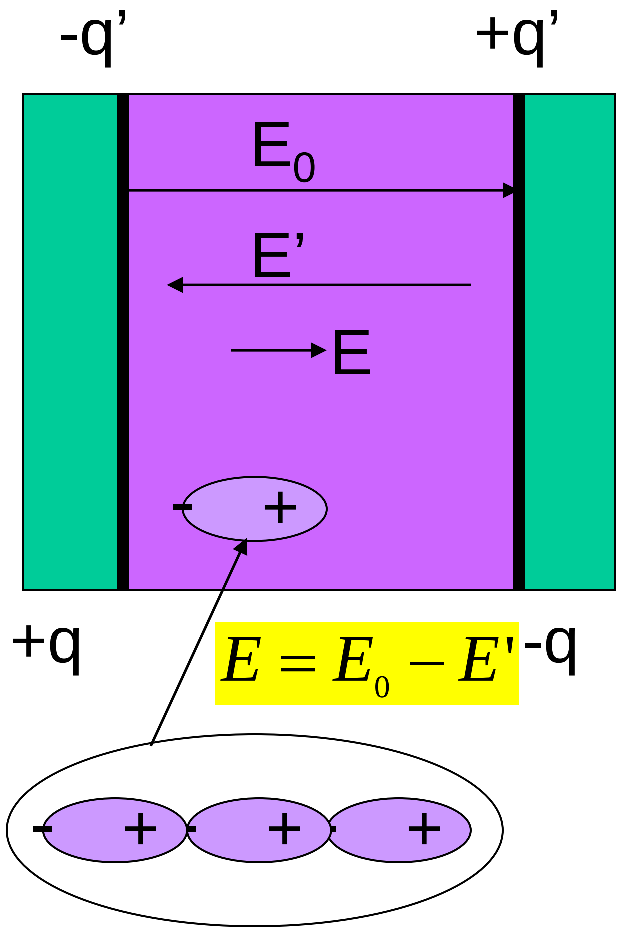
El Campo Eléctrico total es, en este caso $\vec{E} = E_o \vec{i} + E_p(-\vec{i})$

En módulo, el Campo total disminuye

$$E = E_o - E_p$$

Simulación

Dieléctricos



$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{(q-q')}{\varepsilon_0}$$

$$E\,S = \frac{(\sigma-\sigma')\,S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma-\sigma'}{\varepsilon_0}$$

$$E = E_0 - E'$$

$$Si \quad \sigma = \left|\vec{D}\right| \quad \sigma' = \left|\vec{P}\right|$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\,\vec{E} + \vec{P}$$

D: Desplazamiento   P: Polarización

$$P \propto E \Rightarrow \vec{P} = \varepsilon_0\,\chi\,\vec{E} \qquad \vec{D} = (1+\chi)\,\varepsilon_0\,\vec{E} = \varepsilon\,\vec{E}$$

χ : susceptibilidad, ε : permitividad en medio

$$\vec{P} = \varepsilon_0\,\chi\,\vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E}$$

$$(1+\chi) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \mathrm{K} = \varepsilon_r$$ constante dieléctrica

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \Rightarrow P = \sigma' = \varepsilon_0\,E' = \varepsilon_0\left(E_0 - E\right) = \varepsilon_0\,E\left(K-1\right) = \varepsilon_0\,\chi\,E$$

$$E\,S\,\varepsilon_0 = \frac{P}{\varepsilon_0\,\chi} S\,\varepsilon_0 = \frac{\sigma'\,S}{\chi} = q - q' \Rightarrow q'(\frac{1}{\chi} + 1) = q$$

$$q'(1+\chi) = \chi\,q \Rightarrow q' = q(1 - \frac{1}{K})$$

$$K = 1\,(\chi = 0) \Rightarrow q' = 0$$

$$K = \infty\,(\chi = \infty) \Rightarrow q' = q$$

Ley de Gauss en dieléctricos

$$\varepsilon_0 \oiint \vec{E}\,.\,d\vec{S} = q - q'$$

$$\varepsilon_0 \oiint \frac{\vec{D}}{\varepsilon}\,.\,d\vec{S} = q\left[1 - (1 - \frac{1}{K})\right]$$

$$\oiint \vec{D}\,.\,d\vec{S} = q$$

$$\varepsilon_0 \oiint \frac{P}{\varepsilon_0\,\chi}\,.\,d\vec{S} = q\left[1 - (1 - \frac{1}{K})\right]$$

$$\oiint \vec{P}\,.\,d\vec{S} = q'$$

$$q' = q\,(1 - \frac{1}{K}) = q\,\frac{\chi}{K}$$

$$\oiint \vec{P}\,.\,d\vec{S} = q'$$

$$D = \varepsilon_0 \; E_0 \qquad sin\ diel\acute{e}ctrico$$

$$D = \varepsilon \; E \qquad con\ diel\acute{e}ctrico$$

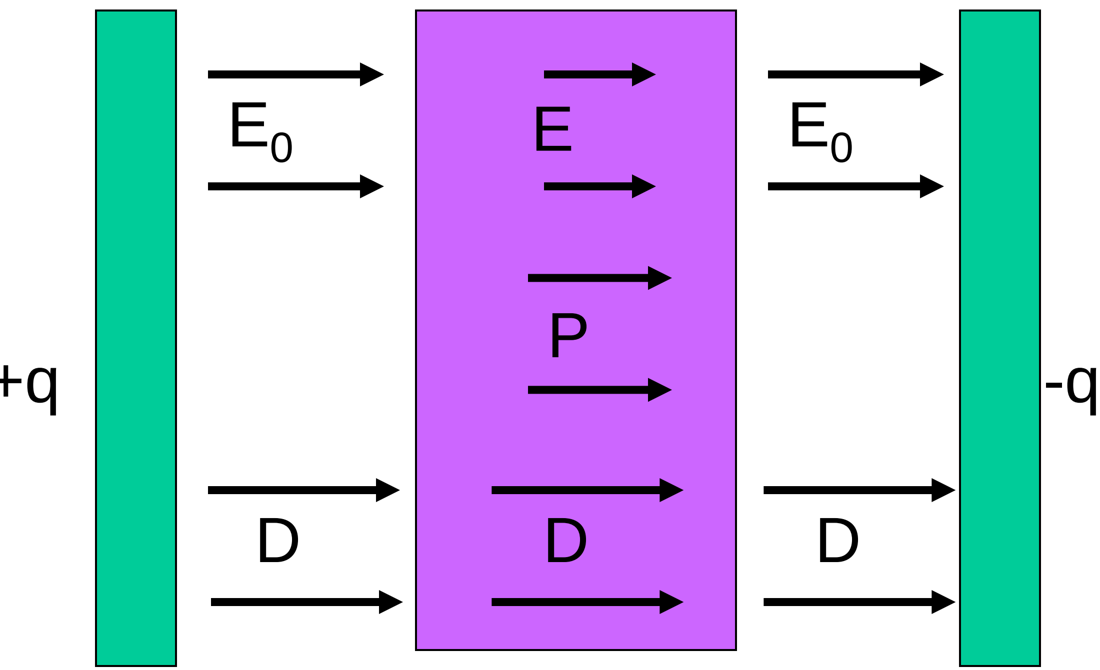
$$1 = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \frac{E_0}{E} \Rightarrow E = \frac{E_0}{K} \Rightarrow V = \frac{V_0}{K}$$

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{V_0 / K}$$

$$\boxed{C = K\, C_0}$$

$$C = K\, \varepsilon_0 \frac{S}{d} = \varepsilon \frac{S}{d}$$

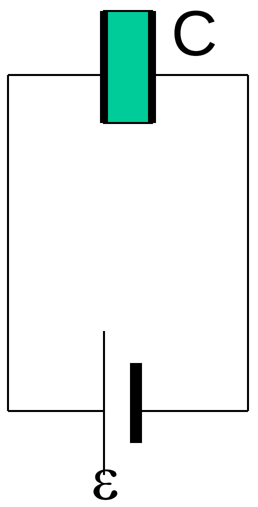
La introducción de un dieléctrico en un condensador multiplica la capacidad por K



Valores

Material	K	Campo Ruptura V/m
Aire		$3\ 10^6$
Pilicarbonato	2,8	$3\ 10^7$
Poliéster	3,3	$6\ 10^7$
Vidrio pirex	4,7	$1\ 10^7$

Hasta ahora C aislado (q cte); que pasa si conectado a V?



Al introducir dieléctrico V cte en bornes de C

$$C_0 \rightarrow C = C_0 \, K \qquad q \rightarrow q_0 \, K \Rightarrow C = C_0 \, K$$

Cargas de polarización en dieléctrico tienden a reducir el campo pero como este está fijado por ε, la batería termi-na reforzando las cargas en C

Capacitor aislado

$$E_{P0} = \frac{1}{2} C_0 V_0^2$$

Capacitor conectado a V

Introduciendo un dieléctrico

$$C_0 \rightarrow C = C_0 \, K \quad V_0 \rightarrow V = \frac{V_0}{K}$$

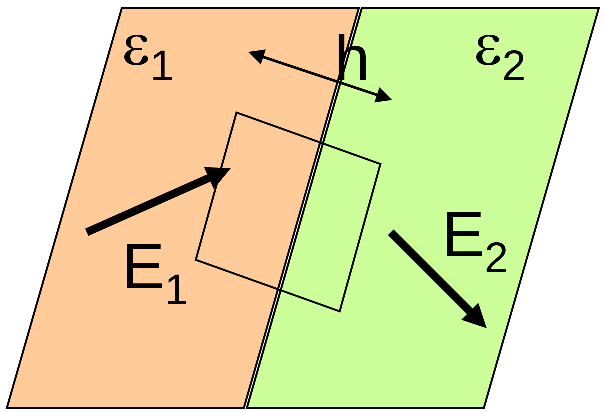
$$E_P = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} C_0 \, K \frac{V_0^2}{K^2} = \frac{E_{P0}}{K}$$

Introduciendo un dieléctrico

$$C_0 \rightarrow C = C_0 \, K \quad V = V_0$$

$$E_P = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} C_0 \, K \, V_0^2 = K \, E_{P0}$$

Condiciones de borde en límite entre dieléctricos

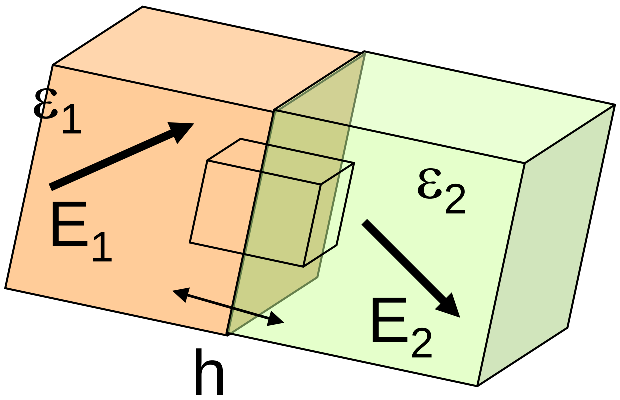


$$\oint \vec{E}\,.\,d\vec{l} = 0$$

$$h \to 0 \Rightarrow \int \vec{E}_1\,.\,d\vec{l} - \int \vec{E}_2\,.\,d\vec{l} = 0$$

$$E_{t1} = E_{t2}$$

siempre



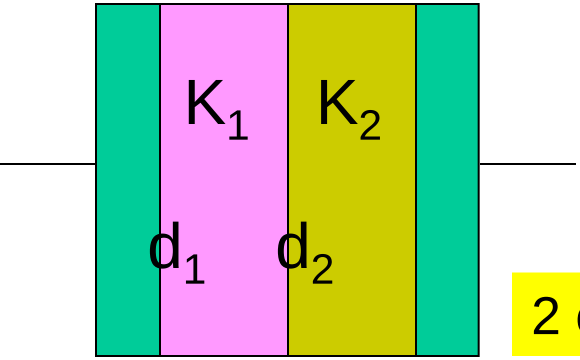
$$\oiint \vec{E}\,.\,d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = 0$$ si q =0 en superficie

$$h \to 0 \Rightarrow \iint \vec{E}_1\,.\,d\vec{S} - \iint \vec{E}_1\,.\,d\vec{S} = 0$$

$$E_{N1} = E_{N2}$$

Si no hay cargas libres en superficie

Ejemplos

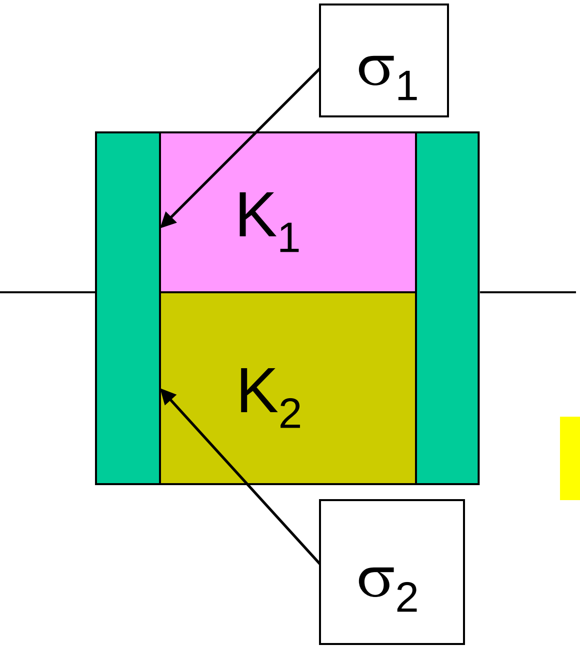


$$D_{n1} = D_{n2} = D \qquad E_1 = \frac{D}{\varepsilon_1} = \frac{D}{\varepsilon_0\, K_1} \qquad E_2 = \frac{D}{\varepsilon_2} = \frac{D}{\varepsilon_0\, K_2}$$

$$V = V_1 + V_2 = E_1\, d_1 + E_2\, d_2 = \frac{D}{\varepsilon_0}\left(\frac{d_1}{K_1} + \frac{d_2}{K_2}\right)$$

2 condensadores en serie

$$\frac{1}{C} = \frac{d_1}{\varepsilon_0\, K_1\, S} + \frac{d_2}{\varepsilon_0\, K_2\, S} = \frac{1}{\varepsilon_0\, S}\left(\frac{d_1}{K_1} + \frac{d_2}{K_2}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{C} = \frac{V}{q} = \frac{\frac{D}{\varepsilon_0}\left(\frac{d_1}{K_1} + \frac{d_2}{K_2}\right)}{\sigma\, S}$$

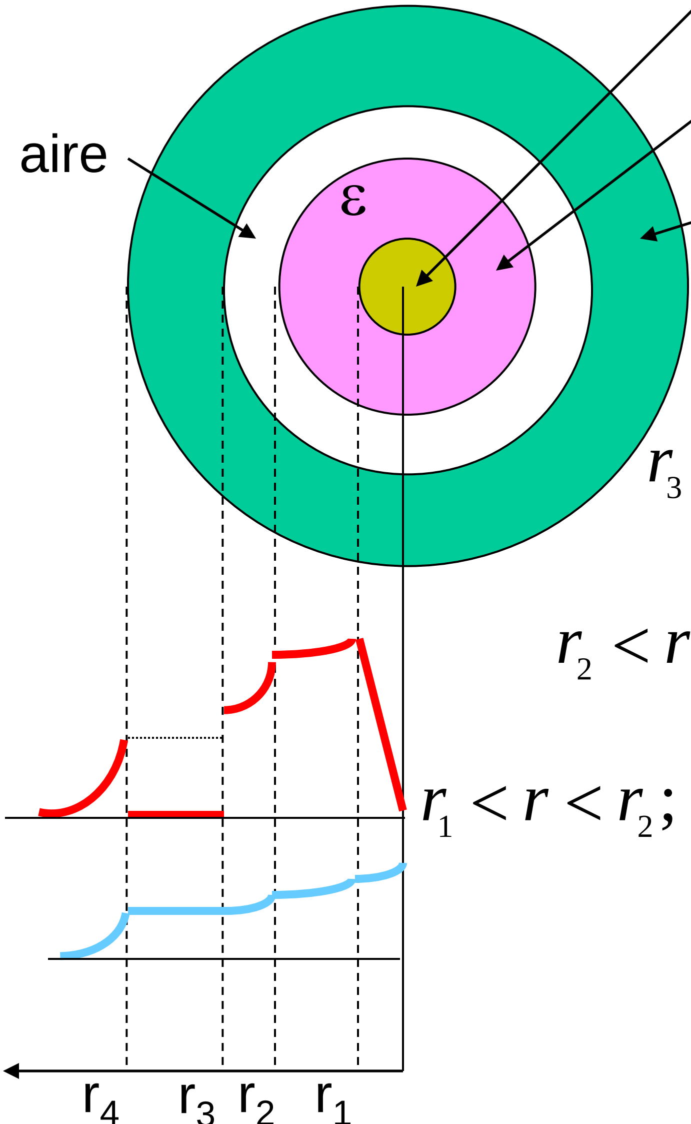


$$E_{n1} = E_{n2} = E \qquad D_1 = \varepsilon_0\, K_1\, E \qquad D_2 = \varepsilon_0\, K_2\, E$$

$$V = E\, d$$

2 condensadores en paralelo

$$\left\{\begin{array}{l} = \Delta V \\ \neq q \\ \neq C \end{array}\right.$$



$$r = \infty \rightarrow V = 0$$

$$r > r_4 \quad E = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2} \quad V = -\int_{\infty}^{r} E\,dr = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r}$$

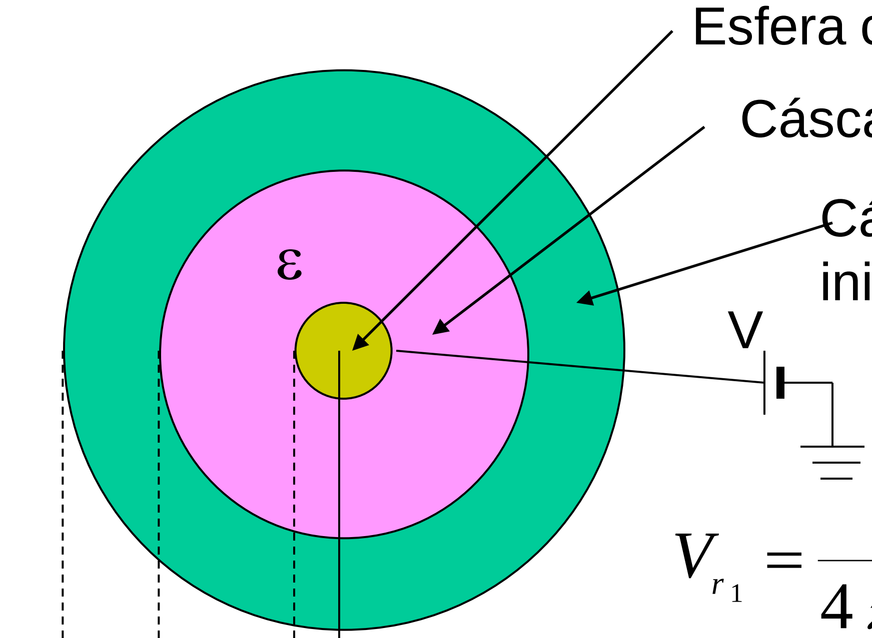
$$r_3 < r < r_4;\, E = 0;\ V = -\int_{\infty}^{r_4} E\,dr - \int_{r_4}^{r} E\,dr = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r_4}$$

$$r_2 < r < r_3;\, E = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2};V = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_4} + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_3}\right)\right)$$

$$r_1 < r < r_2;\, E = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}$$

$$V = \frac{q}{4\,\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_4} + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)\right) + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)\right]$$

$$r < r_1;\, E = \frac{\rho\,r}{3\,\varepsilon_0};V = \frac{q}{4\,\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_4} + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)\right) + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\right] + \frac{\rho}{6\,\varepsilon_0}\left(r_1^2 - r^2\right)$$

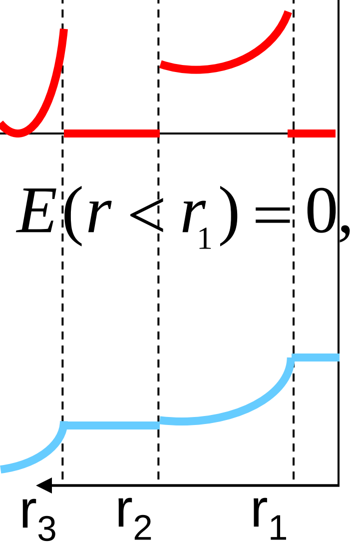


A t=0 q en exterior de cáscara

Con V esfera interior se carga en sup.

$$V_{r_1} = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_1} = V(r<r_1) \Rightarrow q_1 = V_{r_1}\, 4\pi\varepsilon_0 r_1$$

En interior de cáscara aparece $-q_1$ y en exterior $q+q_1$



$$E(r<r_1)=0,\; E(r_1<r<r_2)=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon r^2},\; E(casc)=0,\; E(r>r_3)=\frac{q+q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$r_1<r<r_2;\; V_r - V_{r_1} = -\int_{r_1}^{r}\frac{q_1\,dr}{4\pi\varepsilon r^2} \Rightarrow V_r = V_{r_1} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)$$

$$r_2<r<r_3 \Rightarrow V = cte = V_{r_2}$$

$$r>r_3 \quad V = V_{r_1} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) + \frac{q+q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)$$