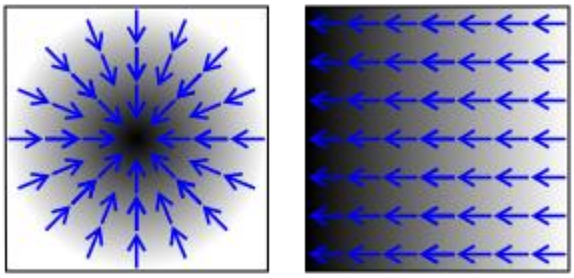
# Gradiente



En esta imagen, el campo escalar se aprecia en blanco y negro, representando valores bajos o altos respectivamente, y el **gradiente** correspondiente se aprecia por flechas azules.

El **gradiente** normalmente denota una dirección en el espacio según la cual se aprecia una variación de una determinada propiedad o magnitud física.
En otros contextos se usa informalmente gradiente, para indicar la existencia de gradualidad o variación gradual en determinado aspecto, no necesariamente relacionado con la distribución física de una determinada magnitud o propiedad.

## Definición

El **gradiente** de un campo escalar, que sea diferenciable en el entorno de un punto, es un vector definido como el único que permite hallar la derivada direccional en cualquier dirección como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = (\mathrm{grad}\phi) \cdot \hat{\mathrm{n}}$$

siendo $\hat{n}$ un vector unitario y $\partial\phi/\partial n$ la derivada direccional de $\phi$ en la dirección de $\hat{n}$, que informa de la tasa de variación del campo escalar al desplazarnos según esta dirección:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\phi(\vec{r} - \epsilon\hat{n}) - \phi(\vec{r})}{\epsilon}$$

Una forma equivalente de definir el gradiente es como el único vector que, multiplicado por cualquier desplazamiento infinitesimal, da el diferencial del campo escalar:

$$d\phi = \phi\left(\vec{r} + d\vec{r}\right) - \phi\left(\vec{r}\right) = \nabla\phi \cdot d\vec{r}$$

Con la definición anterior, el gradiente está caracterizado de forma unívoca. El gradiente se expresa alternativamente mediante el uso del operador nabla:

$$\mathrm{grad}\phi = \nabla\phi$$

## Interpretación del Gradiente

De forma geométrica el gradiente es un vector que se encuentra normal a una superficie o curva en el espacio a la cual se le esta estudiando, en un punto cualquiera, llamese $(x, y)$, $(x, y, z)$, $(tiempo, temperatura)$ etcétera. Algunos ejemplos son:

- Considere una habitación en la cual la temperatura se define a través de un campo escalar, de tal manera que en cualquier punto $(x, y, z)$, la temperatura es $\phi(x, y, z)$. Asumiremos que la temperatura no varía con respecto al tiempo. Siendo esto así, para cada punto de la habitación, el gradiente en ese punto nos dará la dirección en la cual se calienta más rápido. La magnitud del gradiente nos dirá cuán rápido se calienta en esa dirección.

- Considere una montaña en la cual su altura en el punto $(x, y)$ se define como $H(x, y)$. El gradiente de *H* en ese punto estará en la dirección para la que hay un mayor grado de inclinación. La magnitud del gradiente nos mostrará cuán empinada se encuentra la pendiente.

## Aproximación lineal de una función

El gradiente de una función *f* definida de $\mathbf{R}^n$ a **R** caracteriza la mejor aproximación lineal de la función en un punto particular $x_0$ en $\mathbf{R}^n$. Se expresa así:

$$g(x) = f(x_0) + (\nabla_x f(x_0))^T (x - x_0)$$

donde $\nabla_x f(x_0)$ es el gradiente evaluado en $x_0$.

## Propiedades

El gradiente verifica que:

- Es ortogonal a las superficies equiescalares, definidas por $\phi$ =cte..
- Apunta en la dirección en que la derivada direccional es máxima.
- Su módulo es igual a esta derivada direccional máxima.
- Se anula en los puntos estacionarios (máximos, mínimos y puntos de silla)
- El campo formado por el gradiente en cada punto es siempre irrotacional, esto es,

$$\nabla \times (\nabla \phi) \equiv \vec{0}$$

## Expresión en diferentes sistemas de coordenadas

A partir de su definición puede hallarse su expresión en diferentes sistemas de coordenadas.
En coordenadas cartesianas, su expresión es simplemente

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{z}$$

En un sistema de coordenadas ortogonales, el gradiente requiere los factores de escala, mediante la expresión

$$\nabla \phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \phi}{\partial q_1}\hat{q}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \phi}{\partial q_2}\hat{q}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \phi}{\partial q_3}\hat{q}_3$$

Para coordenadas cilíndricas ($h_\rho = h_z = 1$, $h_\varphi = \rho$) resulta

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{z}$$

y para coordenadas esféricas ($h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\varphi = r\,\mathrm{sen}\theta$ )

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$$

## Gradiente de un campo vectorial

En un espacio euclídeo, el concepto de gradiente también puede extenderse al caso de un campo vectorial, siendo el gradiente de $\vec{F}$ un tensor que da el diferencial del campo al realizar un desplazamiento

$$d\vec{F} = \vec{F}(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{F}(\vec{r}) = (\nabla \vec{F}) \cdot d\vec{r}$$

Este tensor podrá representarse por una matriz $3 \times 3$, que en coordenadas cartesianas está formada por las tres derivadas parciales de las tres componentes del campo vectorial.

## **Ejemplo** [editar]

Dada la función $f(x,y,z) = 2x + 3y^2 - \sin(z)$ su vector gradiente es:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(2, 6y, -\cos(z)\right).$$

## Aplicaciones en física

El Gradiente posee innumerables aplicaciones en física, especialmente en electromagnetismo y mecánica de fluidos. En particular, existen muchos campos vectoriales que puede escribirse como el gradiente de un potencial escalar.

Uno de ellos es el campo electrostático, que deriva del potencial eléctrico

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

Todo campo que pueda escribirse como el gradiente de un campo escalar, se denomina *potencial*, *conservativo* o *irrotacional*. Así, una fuerza conservativa deriva de la energía potencial como

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Los gradientes también aparecen en los procesos de difusión que verifican la ley de Fick o la ley de Fourier para la temperatura. Así, por ejemplo, el flujo de calor en un material es proporcional al gradiente de temperaturas

$$\vec{q} = -k\nabla T$$

siendo $k$ la conductividad térmica.

## Divergencia

La **divergencia** de un campo vectorial mide la diferencia entre el flujo entrante y el flujo saliente de un campo vectorial sobre la superficie que rodea a un volumen de control, por tanto, si el campo tiene "fuentes" o "sumideros" la divergencia de dicho campo será diferente de cero.

## Divergencia de un campo vectorial

La divergencia de un campo vectorial es un campo escalar, y se define como el flujo del campo vectorial por unidad de volumen:

$$\mathrm{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

Donde $S$ es una superficie cerrada que se reduce a un punto en el límite. El símbolo $\nabla$ representa el operador nabla.

Esta definición está directamente relacionada con el concepto de flujo del campo. Como en el caso del flujo, si la divergencia en un punto es positiva, se dice que el campo posee *manantiales*. Si la divergencia es negativa, se dice que tiene *sumideros*. El ejemplo más característico lo dan las cargas eléctricas, que dan la divergencia del campo eléctrico, siendo las cargas positivas manantiales y las negativas sumideros del campo eléctrico.

Se llaman *fuentes escalares* del campo $\vec{F}$ al campo escalar que se obtiene a partir de la divergencia de $\vec{F}$

$$\rho(\vec{r}) = \nabla\cdot\vec{F}(\vec{r})$$

La divergencia de un campo vectorial se relaciona con el flujo a través del teorema de Gauss o teorema de la divergencia.

## Coordenadas cartesianas

Cuando la definición de divergencia se aplica al caso de un campo expresado en coordenadas cartesianas,

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_x(x,y,z)\hat{i} + F_y(x,y,z)\hat{j} + F_z(x,y,z)\hat{k}$$

el resultado es sencillo:

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

### Coordenadas ortogonales

Sin embargo, para un caso más general de coordenadas ortogonales curvilíneas, como las cilíndricas o las esféricas, la expresión se complica debido a la dependencia de los vectores de la base con la posición. La expresión para un sistema de coordenadas ortogonales es:

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left(\frac{\partial(F_1h_2h_3)}{\partial q_1}+\frac{\partial(h_1F_2h_3)}{\partial q_2}+\frac{\partial(h_1h_2F_3)}{\partial q_3}\right)$$

Donde los $h_i$ son los factores de escala del sistema de coordenadas, relacionados con la forma del tensor métrico en dicho sistema de coordenadas. Esta fórmula general, para el caso de coordenadas cartesianas ($h_x$ = $h_y$ = $h_z$ = 1) se reduce a la expresión anterior. Para coordenadas cilíndricas ($h_\rho=h_z=1,\ h_\varphi=\rho$) resulta:

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial(F_\varphi)}{\partial\varphi}+\frac{\partial(F_z)}{\partial z}$$

Para coordenadas esféricas ($h_r=1,\ h_\theta=r,\ h_\varphi=r\mathrm{sen}\theta$) resulta

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2F_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial(\mathrm{sen}\theta F_\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial(F_\varphi)}{\partial\varphi}$$

### Coordenadas generales

En sistemas de coordenadas generales, no necesarimente ortogonales, la divergencia de un vector puede expresarse en términos de las derivadas parciales respecto a las coordenadas y el determinante del tensor métrico:

$$\mathrm{div}\ \mathbf{v}=\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{|g|}v^k\right)$$

## Divergencia de un campo tensorial

El concepto de divergencia puede extenderse a un campo tensorial de orden superior. En una variedad de Riemann la divergencia de un tensor T completamente simétrico

$$T=T^{i_1\dots i_m}_{j_1\dots j_n}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_m}}\otimes\mathrm{d}x^{j_1}\otimes\mathrm{d}x^{j_n}$$

Se define como:

$$[\mathrm{div}\ T]^{i_1\dots i_m}_{j_1\dots j_n}=\nabla_\alpha T^{i_1\dots i_{m-1}\alpha}_{j_1\dots j_n}=\partial_\alpha T^{i_1\dots i_{m-1}\alpha}_{j_1,\dots,j_n}+\Gamma^{i_1}_{\alpha\beta}T^{\beta\dots i_m}_{j_1,\dots,j_n}+\cdots+\Gamma^{i_m}_{\alpha\beta}T^{i_1\dots\beta}_{j_1,\dots,j_n}$$

Por ejemplo, en teoría de la relatividad especial la energía de un sistema se representa por un tensor simétrico de segundo orden, cuya divergencia es cero. De hecho el principio de conservación de la energía relativista toma la forma:

$$\nabla_iT^{ij}=0$$

## Teorema de la divergencia

El teorema de la divergencia, frecuentemente llamado teorema de Gauss, relaciona el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada con la integral de la divergencia de dicho campo en el interior del volumen encerrado por una superficie. Ese resultado lo hace interesante en aplicaciones relacionadas con la electroestática como en la mecánica de fluidos.

El teorema se enuncia así: Sea una función vectorial $\mathbf{v}$diferenciable definida sobre un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{R} \subset \Omega$ un conjunto cerrado limitado por una frontera $\partial\mathcal{R}$ o superficie de contorno (que sea una variedad diferenciable) y sea $\mathbf{n}$ el vector normal en cada punto de la superficie, entonces se cumple que:

$$\int_{\mathcal{R}} \mathrm{div}(\mathbf{v})\ dV = \oint_{\partial\mathcal{R}} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\ dS$$

# Rotacional

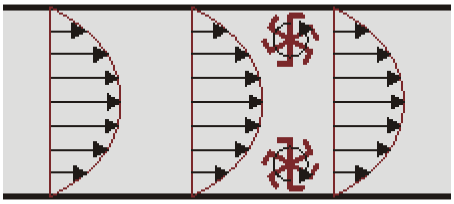
## Introducción

Matemáticamente, esta idea se expresa como el límite de la circulación del campo vectorial, cuando la curva sobre la que se integra se reduce a un punto:

$$\mathrm{rot}\ \vec{F} = \nabla\times\vec{F} \equiv \lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Aquí, Δ*S* es el área de la superficie apoyada en la curva *C*, que se reduce a un punto. El resultado de este límite no es el rotacional completo (que es un vector), sino solo su componente según la dirección normal a Δ*S* y orientada según la regla de la mano derecha. Para obtener el rotacional completo deberán calcularse tres límites, considerando tres curvas situadas en planos perpendiculares.

Aunque el que el rotacional de un campo alrededor de un punto sea distinto de cero no implica que las líneas de campo giren alrededor de ese punto y lo encieren. Por ejemplo, el campo de velocidades de un fluido que circula por una tubería (conocido como perfil de Poiseuille) posee un rotacional no nulo en todas partes, salvo el eje central, pese a que la corriente fluye en línea recta:



La idea es que si colocamos una rueda de paletas infinitamente pequeña en el interior del campo vectorial, esta rueda girará, aunque el campo tenga siempre la misma dirección, debido a la diferente magnitud del campo a un lado y a otro de la rueda.

### **Fuente vectorial y escalar** [editar]

Al campo vectorial, **J**, que se obtiene calculando el rotacional de un campo **F** en cada punto,

$$\mathbf{J} = \nabla\times\mathbf{F}$$

se conoce como las **fuentes vectoriales** de $\mathbf{F}$ (siendo las fuentes escalares las que se obtienen mediante la divergencia).

Un campo cuyo rotacional es nulo en todos los puntos del espacio se denomina **irrotacional** o se dice que carece de fuentes vectoriales. Y si está definido sobre un dominio simplemente conexo entonces dicho campo puede expresarse como el gradiente de una función escalar:

$$\nabla\times\mathbf{f} = 0 \text{ en } \Omega \text{ simplemente conexo } \Rightarrow \mathbf{f} = \nabla\phi$$

## Expresión en coordenadas cartesianas

Partiendo de la definición mediante un límite, puede demostrarse que la expresión, en coordenadas cartesianas, del rotacional es

$$\nabla\times\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

que se puede expresar de forma más concisa con ayuda del operador nabla como un producto vectorial, calculable mediante un determinante:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

En la notación de Einstein, con el símbolo de Levi-Civita se escribe como:

$$(\nabla \times \vec{F})_k = \epsilon_{klm} \partial_l F_m$$

## Expresión en otros sistemas de coordenadas

Si se emplean sistemas de coordenadas diferentes del cartesiano, la expresión debe generalizarse, para incluir el que los vectores de la base dependen de la posición. Para un sistema de coordenadas ortogonales, como las cartesianas, las cilíndricas o las esféricas, la expresión general precisa de los factores de escala:

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{q}_1 & h_2 \hat{q}_2 & h_3 \hat{q}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}$$

(donde, en cartesianas, $h_x = h_y = h_z = 1$ y reobtenemos la expresión anterior. En coordenadas cilíndricas $h_\rho = h_z = 1,\ h_\varphi = \rho$ y en coordenadas esféricas $h_r = 1,\ h_\theta = r,\ h_\varphi = r\mathrm{sen}\theta$).

## Expresión mediante formas diferenciales

Usando la derivada exterior, el rotacional se escribe simplemente como:

$$dF$$

Obsérvese que tomando la derivada exterior de un campo (co)vectorial no da lugar a otro campo vectorial, sino a una 2-forma o un campo de bivector, escrito correctamente como $P\,(dx \wedge dy) + Q\,(dy \wedge dz) + R\,(dx \wedge dz)$. Sin embargo, puesto que los bivectores generalmente se consideran menos intuitivos que los vectores ordinarios, el $\mathbf{R}^3$-dual se utiliza comúnmente en lugar de otro: esto es una operación quiral, produciendo un pseudovector que adquiere valores opuestos en conjuntos coordenados izquierdos y derechos.

# Propiedades

- Todo campo *potencial* (expresable como el gradiente de un potencial escalar) es *irrotacional* y viceversa, esto es,
  $$\vec{E} = -\nabla\phi \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla \times \vec{E} = 0$$
- Todo campo central (radial y dependiente sólo de la distancia al centro) es irrotacional.
  $$\vec{E} = f(r)\hat{r} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla \times \vec{E} = 0$$
  En particular, el campo eléctrostático de una carga puntual (y por superposición, cualquier campo electrostático) es irrotacional.
- El rotacional de un campo vectorial es siempre un campo *solenoidal*, esto es, su divergencia siempre es nula:
  $$\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{F}\right) \equiv 0$$

## Ejemplos

- En un tornado los vientos están rotando sobre el ojo, y un campo vectorial que muestra las velocidades del viento tendría un rotacional diferente de cero en el ojo, y posiblemente en otras partes (véase vorticidad).
- En un campo vectorial que describa las velocidades lineales de cada parte individual de un disco que rota, el rotacional tendrá un valor constante en todas las partes del disco.
- Si una autopista fuera descrita con un campo vectorial, y los carriles tuvieran diversos límites de velocidad, el rotacional en las fronteras entre los carriles sería diferente de cero.
- La ley de Faraday de la inducción y la ley de Ampère-Maxwell, dos de las ecuaciones de Maxwell, se pueden expresar muy simplemente usando el rotacional. La primera indica que el rotacional de un campo eléctrico es igual a la tasa de variación de la densidad del flujo magnético, con signo opuesto debido a la Ley de Lenz; la segunda indica que el rotacional de un campo magnético es igual a la suma de la densidad de corrientes y la derivada temporal de la densidad de flujo eléctrico.