# Corriente Alterna

Producción de fem Alterna Sinusoidales

Valores Medios y Eficaces

Corriente Alterna en Elementos de Circuito

Circuitos LCR. Impedancia

Notación Fasorial

Potencia en Corriente Alterna

Resonancia. Factor de Calidad

Transformadores

***BIBLIOGRAFÍA***

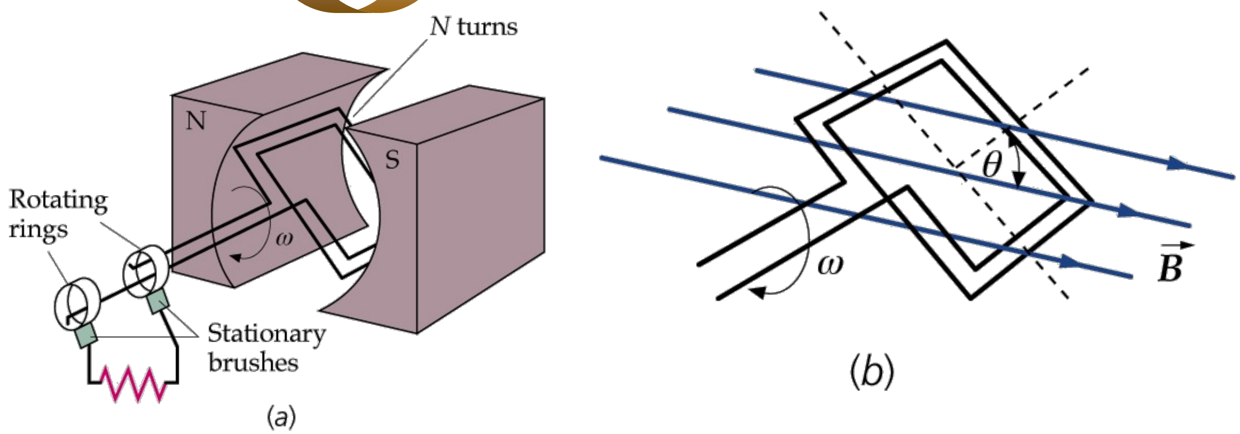

- Alonso; Finn. "Física ". Cap. 27. Addison-Wesley Iberoamericana.
- Edminister. “Circuitos eléctricos”. Cap. 8, 9 y 30. McGraw-Hill
- Fraile Mora. “Electromagnetismo y circuitos eléctricos”. E.T.S.I.T. Madrid.
- Gettys; Keller; Skove. "Física clásica y moderna". Cap. 31 McGraw-Hill.
- Halliday; Resnick. "Fundamentos de física". Cap. 39. CECSA.
- Roller; Blum. "Física". Cap. 39. Reverté.
- Serway. "Física". Cap. 33. McGraw-Hill.
- Tipler. "Física". Cap. 30. Reverté

# Producción de fem Alterna Sinusoidal

Se dice que una corriente es alterna si cambia de sentido periódicamente.

Generador de corriente alterna

Una espira que gira con velocidad angular constante en el seno de un campo magnético uniforme




$$\Phi_B = B\,S\cos\theta$$

Como $\theta = \omega\,t + \theta_o$

$$\Phi_B = B\,S\cos(\omega\,t + \theta_o)$$

Tomando $\theta_o=\pi/2$, para una espira con N vueltas

$$\Phi_B = -N\,B\,S\,\mathrm{sen}\,\omega\,t$$

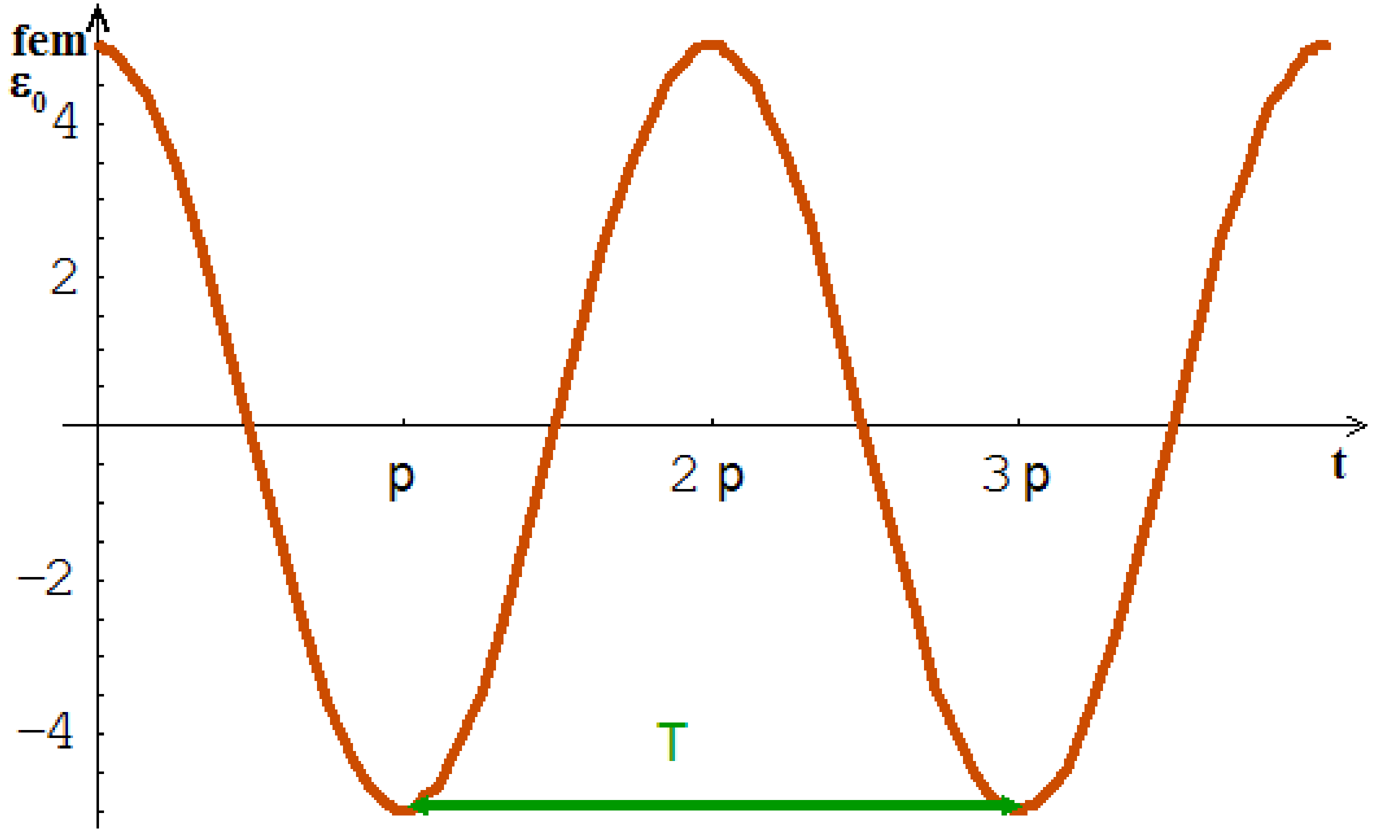
Aplicando la ley de Faraday

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = N\,B\,S\,\omega\cos\omega\,t$$

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_o\cos\omega\,t}$$

Generador de corriente alterna ~

# Representación gráfica




$\varepsilon_o$: fem. Amplitud de onda → Fuerza electromotriz máxima

$T=2\pi/\omega$: Periodo de la fem → Tiempo que tarda en recorrer un ciclo completo

$f=1/T$: Frecuencia → Ciclos realizados por unidad de tiempo (Hz)

# Valores Medios y Eficaces

Caracterización de una corriente utilizando valores medios

$$\langle f\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f\,dt \quad \begin{cases} \langle V\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T V\,dt \\ \langle I\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T I\,dt \end{cases}$$

Si $V = V_o \cos\omega t$ con $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$$\langle V\rangle = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^T V_o\cos\omega t\,dt = \frac{1}{2\pi}V_o\left[\mathrm{sen}\,\omega t\right]_0^{2\pi/\omega} = 0$$

$$\langle I\rangle = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^T I_o\cos\omega t\,dt = \frac{1}{2\pi}I_o\left[\mathrm{sen}\,\omega t\right]_0^{2\pi/\omega} = 0$$

Los valores medios no dan información sobre las corrientes alternas.

## Caracterización de las corrientes alternas utilizando valores eficaces

$$f_{ef} = \sqrt{\langle f^2 \rangle} \quad \begin{cases} V_{ef} = \sqrt{\langle V^2 \rangle} \\ I_{ef} = \sqrt{\langle I^2 \rangle} \end{cases}$$

$$\langle V^2 \rangle = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^T V_o^2 \cos^2\omega t \, dt = \frac{\omega}{2\pi} V_o^2 \int_0^{2\pi/\omega} \frac{\cos 2\omega t + 1}{2} dt = \frac{\omega}{2\pi} V_o^2 \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{V_0^2}{2}$$

$$\boxed{V_{ef} = \frac{V_o}{\sqrt{2}}}$$

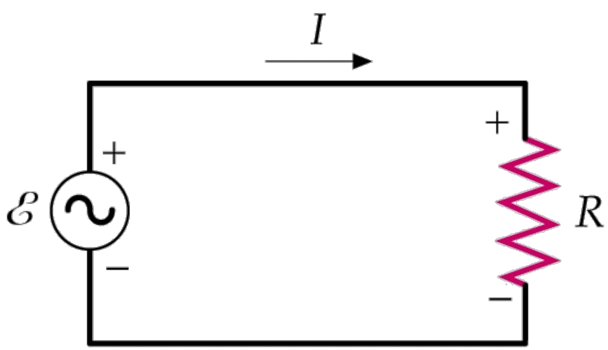
$$\langle I^2 \rangle = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^T I_o^2 \cos^2\omega t \, dt = \frac{\omega}{2\pi} I_o^2 \int_0^{2\pi/\omega} \frac{\cos 2\omega t + 1}{2} dt = \frac{\omega}{2\pi} I_o^2 \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega} = \frac{I_0^2}{2}$$

$$\boxed{I_{ef} = \frac{I_o}{\sqrt{2}}}$$

Los voltímetros y amperímetros están diseñados para medir valores eficaces de la corriente o la tensión.

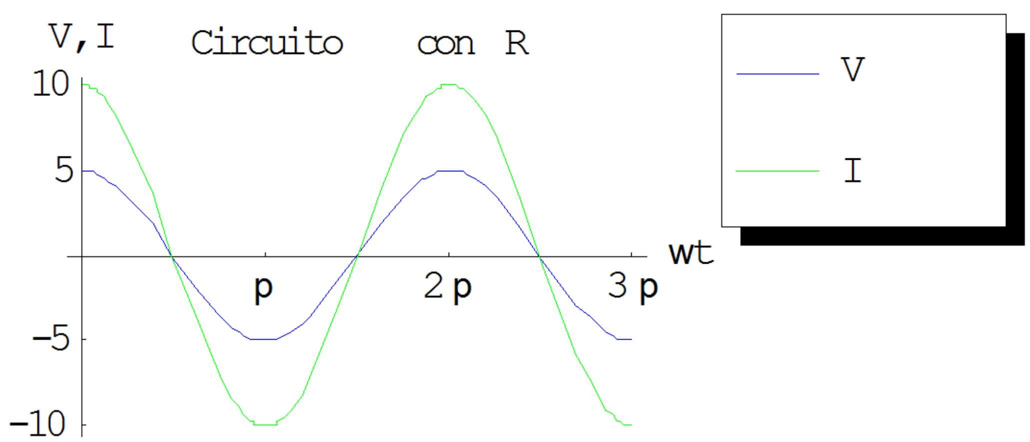
# Corriente Alterna en Elementos de Circuito

## I. Corriente alterna en una resistencia

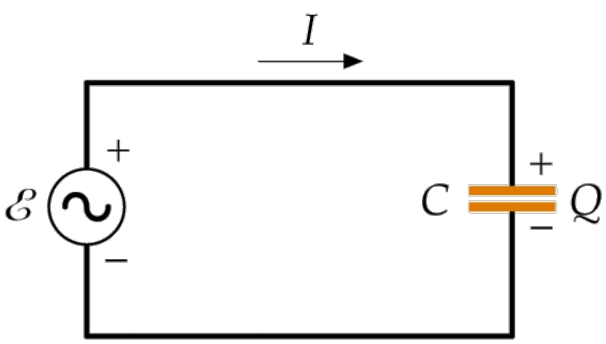



$$I(t) = \frac{\varepsilon_o}{R}\cos\omega t \;\Rightarrow\; \boxed{I(t) = I_o \cos\omega t}$$

La tensión aplicada y la corriente están en fase



# II. Corriente alterna en un condensador




Para calcular la corriente en el circuito aplicamos la L.K.V

$$\varepsilon = V_c = \frac{q}{C} \Rightarrow \varepsilon_o \cos\omega t = \frac{q}{C}$$

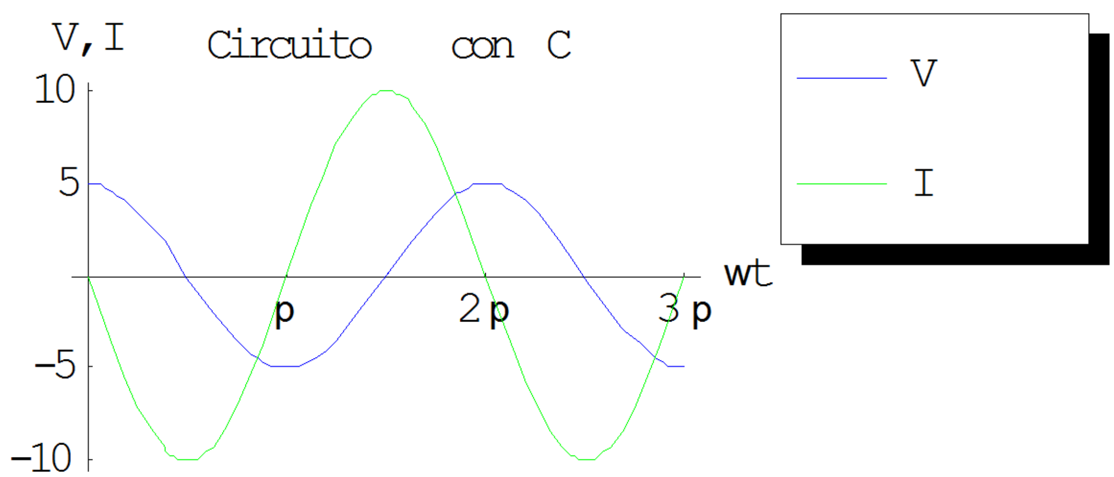
$$q(t) = \varepsilon_o C \cos\omega t$$

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\varepsilon_o C\omega\, \mathrm{sen}\,\omega t$$

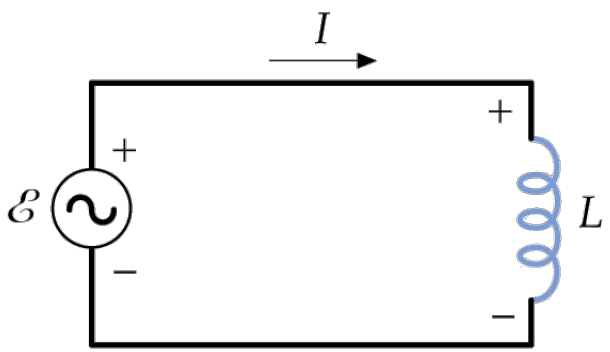
$$\boxed{I(t) = \frac{\varepsilon_o}{1/C\omega}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_o \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Donde $X_c = \dfrac{1}{C\omega}$ $\Rightarrow$ *Reactancia capacitiva o capacitancia*

En este caso, corriente y voltaje están desfasados: la corriente está adelantada $\pi/2$ respecto del voltaje



# III. Corriente alterna en una bobina




Para calcular la corriente en el circuito aplicamos la L.K.V

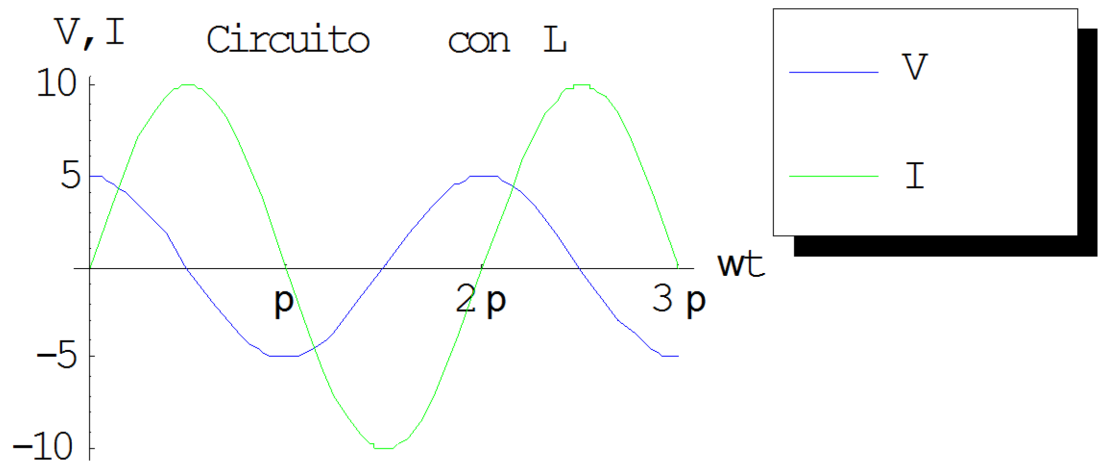
$$\varepsilon - L\frac{dI}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_o \cos\omega t = L\frac{dI}{dt}$$

$$dI = \frac{\varepsilon_o}{L}\cos\omega t \, dt$$

$$\boxed{I(t) = \frac{\varepsilon_o}{L\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_o \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

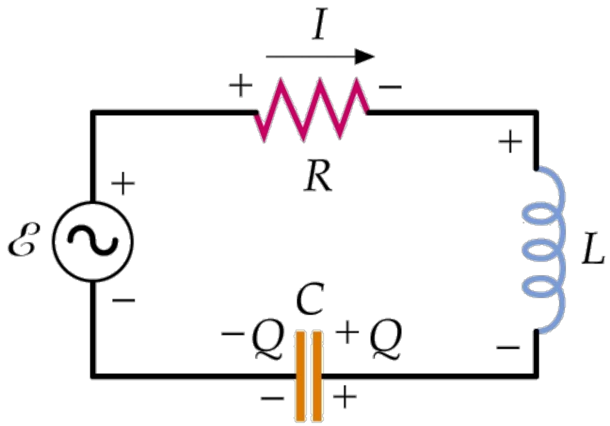
Donde $X_L = L\omega$ ⇒ ***Reactancia inductiva o inductancia***

En este caso, corriente y voltaje están desfasados: la corriente está atrasada $\pi/2$ respecto del voltaje



# Circuitos LCR: Impedancia

## Circuito LCR en serie




$$\varepsilon_o \cos\omega t = \frac{q}{C} + I\,R + L\frac{dI}{dt}$$

Derivando con respecto al tiempo

$$-\varepsilon_o \omega\, \mathrm{sen}\omega t = \frac{I}{C} + R\frac{dI}{dt} + L\frac{d^2 I}{dt^2}$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial, con dos constantes de integración, cuya solución se puede escribir de la forma

$$\boxed{I = I_o \cos(\omega t - \delta)}$$

$I_o, \delta :$ constantes

**Ángulo de fase** $\mathrm{tg}\,\delta = \dfrac{X_L - X_C}{R}$

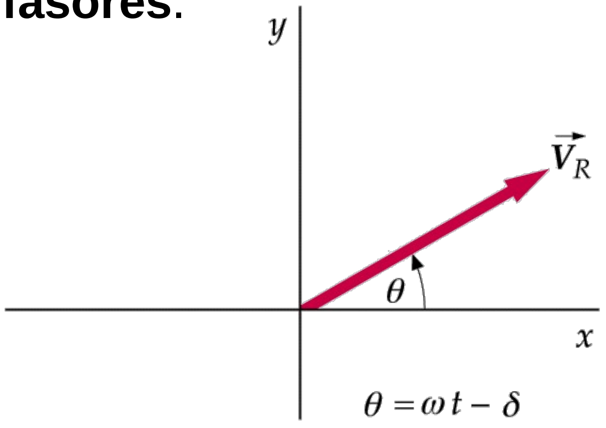
**Corriente máxima** $I_o = \dfrac{\varepsilon_o}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \dfrac{\varepsilon_o}{Z}$

$X_L - X_C$ **Reactancia total**

$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ **Impedancia**

# Notación fasorial

La relación entre corriente y voltaje en una bobina o en un condensador puede representarse mediante vectores bidimensionales llamados **fasores**.




Podemos representar la caída de potencial en una resistencia como un vector de módulo $I_o R$, que forma un ángulo $\theta$ con el eje X

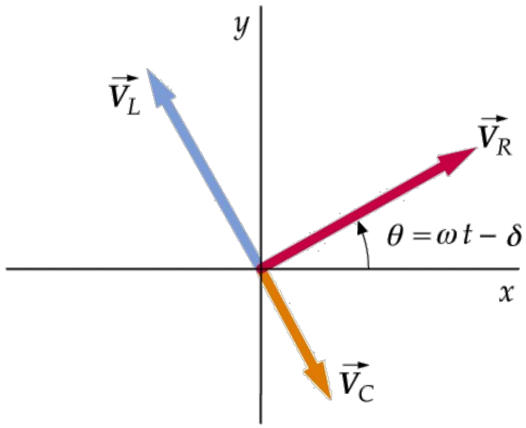
El valor instantáneo de la caída de tensión es la componente x del vector $V_R$, que gira en sentido antihorario con una velocidad $\omega$.

**Uso de los fasores** → Cualquier función A cos($\omega$t-$\delta$), será la componente x de un fasor que forma un ángulo ($\omega$t-$\delta$) con el eje x

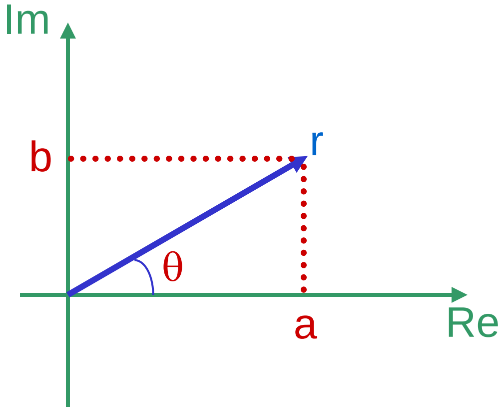
A cos($\omega$t-$\delta_1$) → Fasor A $(\vec{A})$

B cos($\omega$t-$\delta_2$) → Fasor B $(\vec{B})$

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$



Esta representación fasorial, la podemos llevar a cabo en el plano complejo




Coordenadas cartesianas $z = a + jb$

Coordenadas polares $z = r_{\underline{|\theta}}$

Cambio de coordenadas

Cartesianas a polares

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

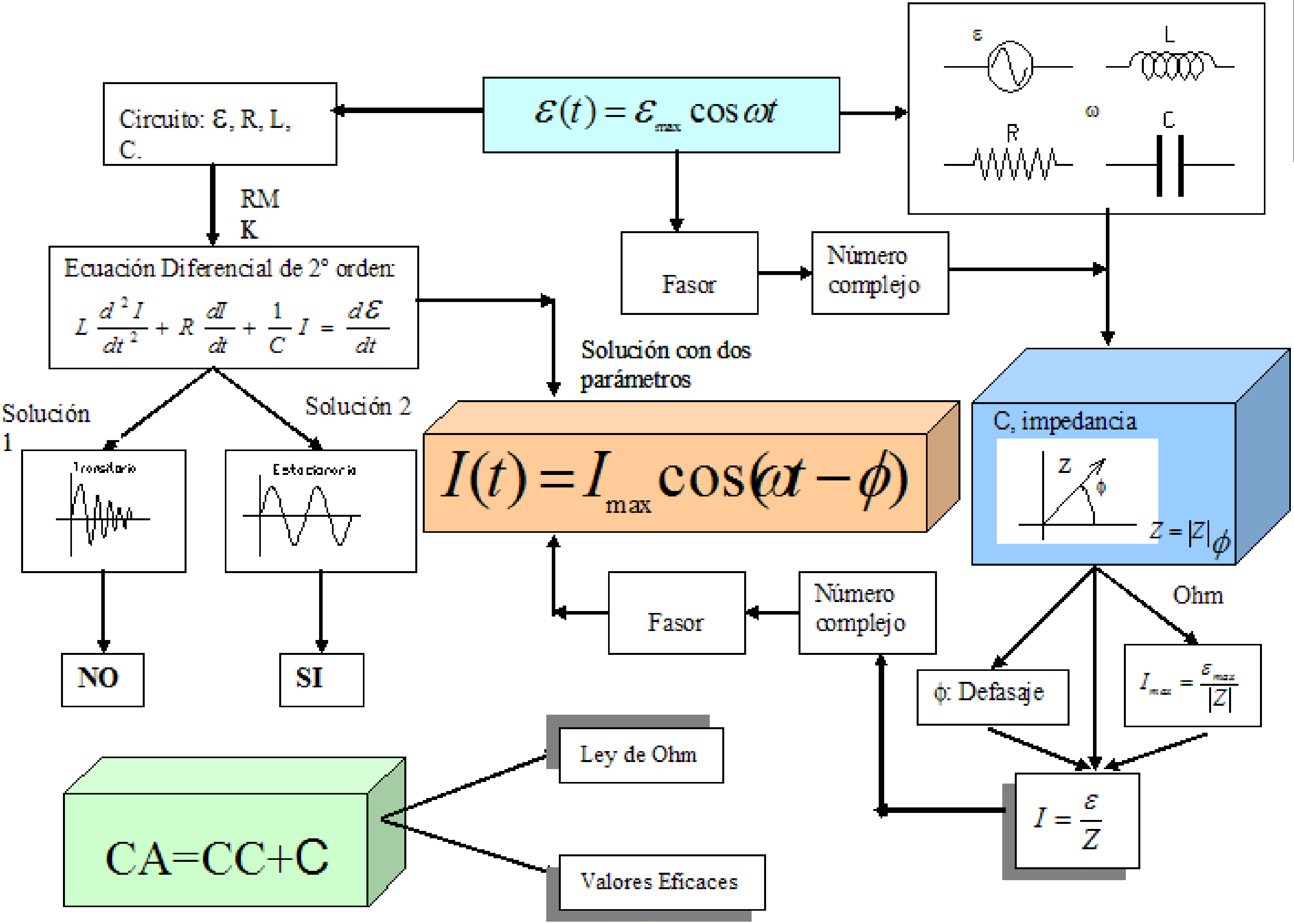
$$\theta = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{b}{a}$$

Polares a cartesianas

$$a = r\cos\theta$$

$$b = r\,\mathrm{sen}\theta$$

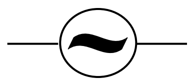
**Fórmula de Euler** ⟹ $re^{\pm j\theta} = r\cos\theta \pm jr\,\mathrm{sen}\theta$



Circuito: ε, R, L, C.
$\varepsilon(t) = \varepsilon_{max} \cos \omega t$
ε
L
R
C
ω
RMK
Ecuación Diferencial de 2° orden:
$L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{d\varepsilon}{dt}$
Fasor
Número complejo
Solución con dos parámetros
Solución 1
Solución 2
Transitorio
Estacionario
$I(t) = I_{max} \cos(\omega t - \phi)$
C, impedancia
Z
ϕ
$Z = |Z|_{\phi}$
NO
SI
Fasor
Número complejo
Ohm
ϕ: Defasaje
$I_{max} = \frac{\varepsilon_{max}}{|Z|}$
$I = \frac{\varepsilon}{Z}$
CA=CC+C
Ley de Ohm
Valores Eficaces

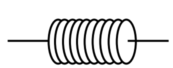
# Representación compleja de elementos de corriente alterna

Vamos a reproducir las corrientes encontradas en circuitos de corriente alterna utilizando el formalismo de los números complejos. Representaremos por $\varepsilon$ e i las tensiones y corrientes, teniendo en cuenta que las magnitudes de interés físico serán Re($\varepsilon$) y Re(i). Así, los circuitos de corriente alterna se pueden resolver considerando la ley de Ohm con el formalismo de los números complejos.

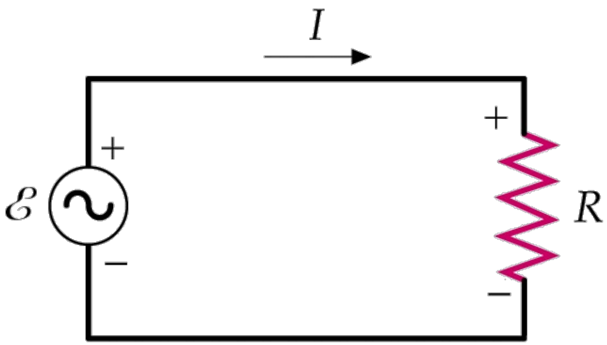
- Fuente de tensión  $\varepsilon = \varepsilon_o e^{j(\omega t+\delta)}$ $\quad \varepsilon = \varepsilon_{o}\angle\delta$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}(\varepsilon) = \varepsilon_o \cos(\omega t + \delta)$

- Resistencia  $Z_R = R$ $\Rightarrow$ Corriente y tensión están en fase.

- Condensador  $Z_C = -\dfrac{j}{C\omega}$ $\Rightarrow$ Corriente adelantada $\pi/2$ respecto de la tensión.

- Inducción  $Z_L = jL\omega$ $\Rightarrow$ Corriente atrasada $\pi/2$ respecto de la tensión.

## I. Corriente alterna compleja en una resistencia



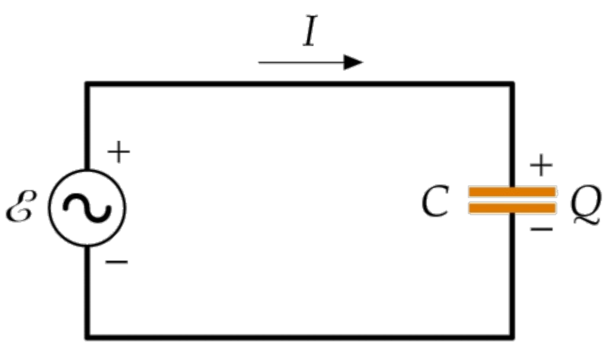

$$\varepsilon = \varepsilon_o e^{j\omega t}$$

$$Z_R = R$$

Aplicando la ley de Ohm

$$i = \frac{\varepsilon}{Z_R} = \frac{\varepsilon_o}{R} e^{j\omega t} \Rightarrow I = \mathrm{Re}(i) = \frac{\varepsilon_o}{R} \cos \omega t$$

## II. Corriente alterna compleja en un condensador



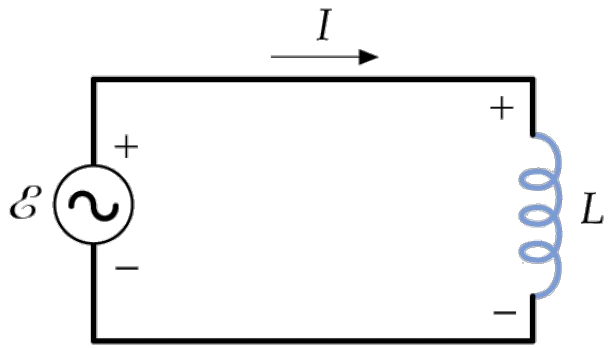

$$\varepsilon = \varepsilon_o e^{j\omega t}$$

$$Z_C = -\frac{j}{C\omega}$$

Aplicando la ley de Ohm

$$i = \frac{\varepsilon}{Z_C} = \frac{\varepsilon_o}{-j/C\omega} e^{j\omega t} = \frac{\varepsilon_o}{1/C\omega} e^{j(\omega t + \pi/2)} \Rightarrow I = \mathrm{Re}(i) = \frac{\varepsilon_o}{1/C\omega} \cos(\omega t + \pi/2)$$

# III. Corriente alterna compleja en una bobina



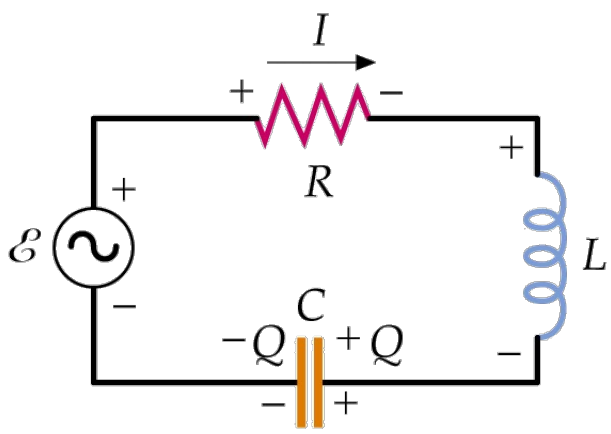

$$\varepsilon = \varepsilon_o e^{j\omega t}$$

$$Z_L = jL\omega$$

Aplicando la ley de Ohm

$$i = \frac{\varepsilon}{Z_L} = \frac{\varepsilon_o}{jL\omega} e^{j\omega t} = \frac{\varepsilon_o}{L\omega} e^{j(\omega t - \pi/2)} \Rightarrow I = \mathrm{Re}(i) = \frac{\varepsilon_o}{L\omega}\cos(\omega t - \pi/2)$$

# Circuito LCR en serie




$$\varepsilon = \varepsilon_o e^{j\omega t}$$

$$Z_T = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega}) = R + j(X_L - X_C)$$

$$i = \frac{\varepsilon}{Z_T} = \frac{\varepsilon_o}{R + j(X_L - X_C)} e^{j\omega t}$$

Multiplicando numerador y denominador por el conjugado, se obtiene

$$i = \frac{\varepsilon}{Z_T} = \frac{\varepsilon_o}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} e^{j(\omega t - \delta)}$$

$$I = Re(i) = I_o \cos(\omega t - \delta) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_o = \dfrac{\varepsilon_o}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \\[2ex] \tan\delta = \dfrac{X_L - X_C}{R} \end{array} \right.$$

Para una impedancia cualquiera y un circuito que no sea RCL en serie, tendremos, suponiendo que el voltaje no tiene fase inicial, magnitudes del tipo

$$v = V_o e^{j\omega t}$$

$$Z = |Z| e^{j\delta}$$

Para calcular la corriente compleja aplicamos la ley de Ohm de forma que, operando con fasores podemos escribir

$$i = \frac{v}{Z} = \frac{V_o}{|Z|} e^{j(\omega t - \delta)}$$

Con lo cual $$I = \mathrm{Re}(i) = \frac{V_o}{|Z|}\cos(\omega t - \delta) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_o = \dfrac{V_o}{|Z|} \\[2ex] \tan\delta = \dfrac{\mathrm{Im}(Z)}{\mathrm{Re}(Z)} \end{array} \right.$$

# 12.6 Potencia en corriente alterna

- Potencia en una resistencia

Como la resistencia no introduce diferencia de fase entre corriente y voltaje, podemos escribir

*Potencia instantánea* $P(t) = \varepsilon(t) I(t)$

$$P(t) = \varepsilon_o I_o \cos\omega t \cos\omega t = \frac{\varepsilon_o^2}{R}\cos^2 \omega t$$

*Potencia media* $$P = \langle P(t) \rangle = \frac{\varepsilon_o^2}{R}\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{\varepsilon_o^2}{R}\frac{1}{2}$$

Con valores eficaces $$\boxed{P = \frac{\varepsilon_{ef}^2}{R} = R\, I_{ef}^2}$$

La resistencia disipa energía en forma de calor por efecto Joule.

## Potencia en un condensador

En un instante dado, la energía puede estar entrando o saliendo del condensador, dependiendo si en ese momento se carga o se descarga. Como la corriente oscila sinusoidalmente, la energía promedio disipada en el condensador es cero.

*Potencia instantánea* $P(t) = \varepsilon(t) I(t)$

$$P(t) = \varepsilon_o I_o \cos\omega t \cos(\omega t + \pi/2) = -\frac{\varepsilon_o^2}{X_C} \cos\omega t \,\mathrm{sen}\,\omega t$$

*Potencia media* $P = \langle P(t) \rangle = -\frac{\varepsilon_o^2}{X_C} \langle \cos\omega t \,\mathrm{sen}\,\omega t \rangle = 0$

## Potencia en una bobina:

Ocurre lo mismo que con el condensador, luego

*Potencia instantánea* $P(t) = \varepsilon(t) I(t)$

$$P(t) = \varepsilon_o I_o \cos\omega t \cos(\omega t - \pi/2) = \frac{\varepsilon_o^2}{X_L} \cos\omega t \,\mathrm{sen}\,\omega t$$

*Potencia media* $P = \langle P(t) \rangle = \frac{\varepsilon_o^2}{X_L} \langle \cos\omega t \,\mathrm{sen}\,\omega t \rangle = 0$

## Caso general

Supongamos un circuito caracterizado por $\left\{\begin{array}{l} V = V_o \cos\omega t \\ I = I_o \cos(\omega t - \delta) \end{array}\right.$

siendo $I_o = \dfrac{V_o}{|Z|}$ $\quad \tan\delta = \dfrac{\mathrm{Im}(Z)}{\mathrm{Re}(Z)}$

*Potencia instantánea* $P(t) = V(t)I(t)$

$$P(t) = V_o I_o \cos\omega t \cos(\omega t - \delta)$$

*Potencia media*

$$P = \langle P(t)\rangle = V_o I_o \langle \cos\omega t \cos(\omega t - \delta)\rangle = V_o I_o \left\langle \cos^2 \omega t \cos\delta \right\rangle + V_o I_o \langle \underbrace{\cos\omega t \,\mathrm{sen}\omega t \,\mathrm{sen}\delta}_{0} \rangle$$

$$P = \langle P(t)\rangle = \frac{V_o I_o}{2}\cos\delta$$

Con valores eficaces $\boxed{P = V_{ef} I_{ef} \cos\delta}$

## Potencia compleja

$$v = V_o e^{j\omega t}$$

$$i = I_o e^{j(\omega t - \delta)}$$

$$Z = |Z| e^{j\delta}$$

$$S = \frac{1}{2} v\, i^* = \frac{1}{2} V_o I_o e^{j\delta} = V_{ef} I_{ef} (\cos\delta + j\,\mathrm{sen}\delta)$$

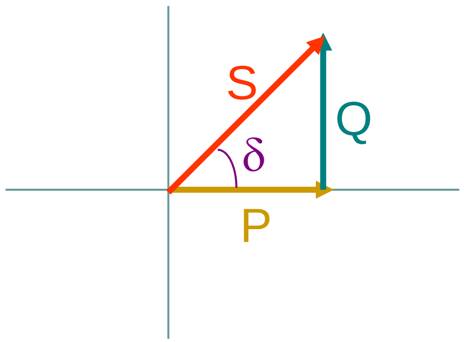
Cada uno de los términos de esta potencia compleja tiene un significado

**Potencia activa** (se mide en Watios, W) $P = \mathrm{Re}(S) = V_{ef} I_{ef} \cos\delta$

**Potencia reactiva** (se mide en Voltio·Amperio reactivo, VAR) $Q = \mathrm{Im}(S) = V_{ef} I_{ef}\ \mathrm{sen}\delta$

**Potencia aparente** (se mide en Voltio·Amperio, VA) $S = |S| = V_{ef} I_{ef}$

Con estos tres términos se define el **triángulo de potencias**, de forma que




$$\boxed{S = P + jQ}$$

**Factor de potencia**

$$\boxed{\cos\delta = \frac{P}{|S|}}$$

# Resonancia. Factor de calidad

En un circuito RCL en serie, tanto la corriente máxima como la diferencia de fase dependen de la frecuencia angular $\omega$.

**Frecuencia natural de oscilación**

$$I_o = \frac{\varepsilon_o}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

$$\tan\delta = \frac{X_L - X_C}{R}$$

La frecuencia de la fuerza impulsora (fem alterna) coincide con esta frecuencia natural

***Respuesta máxima del circuito***

$I_o$ será máxima cuando $X_L = X_C$

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_o}$$

Frecuencia de resonancia

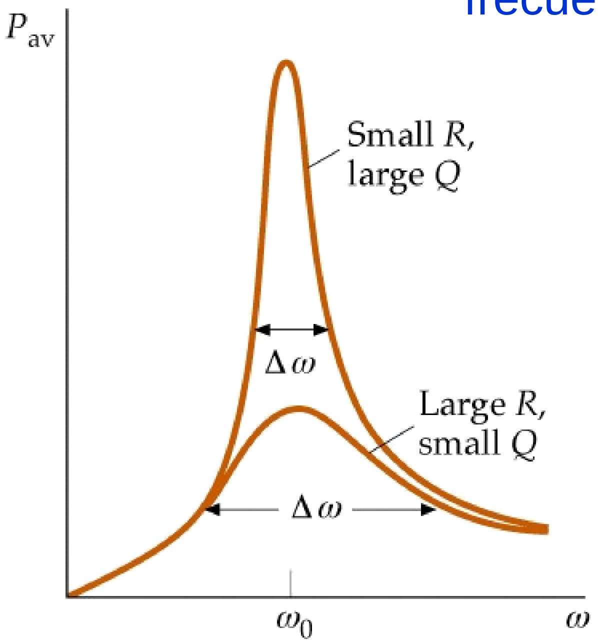
En este caso la impedancia alcanza su valor mínimo y la corriente su valor más alto

**Circuito en resonancia**

$\delta$ vale cero y el factor de potencia vale 1

*Curvas de resonancia*

Representan la potencia media suministrada por el generador al circuito en función de la frecuencia del generador.




La potencia media es máxima cuando $\omega = \omega_o$. Cuando R es pequeña, la anchura de la curva también lo es, mientras que se ensancha a medida que R aumenta.

**Anchura de resonancia**

$\Delta\omega$ = Diferencia entre los dos puntos de la curva en que la potencia es la mitad de su valor máximo

## Factor de calidad

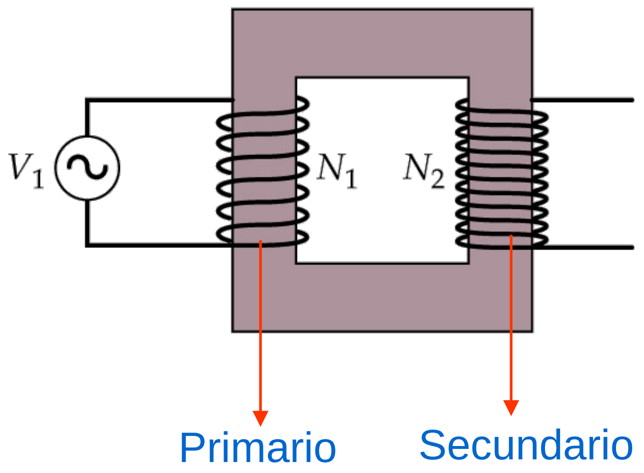
$$Q = \frac{\omega_o L}{R}$$

Q alto implica curva de resonancia estrecha

$$\boxed{Q = \frac{\omega_o}{\Delta\omega}}$$

# Transformadores

Un transformador es un dispositivo utilizado para aumentar o disminuir el voltaje en un circuito sin pérdida apreciable de potencia. Consta de dos bobinas arrolladas sobre un núcleo de hierro.




$$V_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

El flujo que atraviesa cada espira en ambos arrollamientos es el mismo, luego la tensión que aparece en el secundario es

$$V_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

Comparando las dos ecuaciones

$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1$$

Transformador Elevador $\quad N_2 > N_1 \;\Rightarrow\; V_2 > V_1$

Transformador Reductor $\quad N_2 < N_1 \;\Rightarrow\; V_2 < V_1$

Si colocamos una **Resistencia de Carga** en el secundario, aparecerá una corriente $I_2$ en fase con $V_2$ y aparecerá un flujo adicional proporcional a $N_2 I_2$

Como el flujo en el primario debe tener el mismo ritmo de variación al estar conectado a una fem externa, debe aparecer una corriente $I_1$en el primario de forma que

$$N_1 I_1 = -N_2 I_2$$

Si no existen pérdidas, se debe cumplir que $\varepsilon_{ef} I_{1ef} = V_2 I_{2ef}$

**Uso de los transformadores** → Transporte de energía eléctrica con pérdidas mínimas de energía por efecto Joule utilizando alto voltaje y baja corriente.

## Ejemplo:

Consideremos una ciudad, con una población de 100.000 habitantes, si suponemos que cada uno consume una potencia media de 1.5 [kW], se necesita para cada persona una corriente

$$P = V\,I \implies I = \frac{1500}{220} = 7 \;[A]$$

La corriente total necesaria para la misma sería de 700.000 A, para lo cual se necesitarían gruesos cilindros de cobre con grandes pérdidas.

Si se utilizan transformadores de alta (elevadores) para transportar la potencia, la corriente necesaria se reduce a

$$\varepsilon_{ef} I_{1ef} = V_2 I_{2ef} \implies I_{2ef} = \frac{220}{600.000} 700.000 = 250 \;[A]$$

Dentro de la ciudad se sitúan transformadores que reducen el valor del voltaje hasta 10.000 V, por ejemplo. Cerca de las casas se sitúan nuevos transformadores que reducen el voltaje de nuevo hasta 220 [V]. Debido a esta facilidad para aumentar o reducir el voltaje de la corriente alterna, se utiliza este tipo de corriente y no la corriente continua.