Interpretación física de Gradiente, Divergencia y Rotacional

Gradiente

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un campo escalar. Definimos el gradiente de f en x como

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

El vector $\nabla f(x)$ es perpendicular a las curvas de nivel $C_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = \lambda\}$. Además el gradiente da la dirección de máximo crecimiento de f en el punto x. Para esto basta escribir, para un vector unitario v, la variación en la dirección de v como la derivada de $f(x + tv)$ que es:

$$df(x)v = < \nabla f(x), v >,$$

y que tiene valor máximo cuando v es paralelo a $\nabla f(x)$, es decir con $v = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$. Para este vector, la fórmula da exactamente $df(x)v = |\nabla f(x)|$.

Rotacional y divergencia

Sea $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial

$$E(x_1, x_2, x_3) = (E_1(x_1, x_2, x_3), E_2(x_1, x_2, x_3), E_3(x_1, x_2, x_3)).$$

Pensemos en E como el campo de velocidades de un fluido. En cada punto nos da la velocidad de la partícula correspondiente. Entonces la curva descrita por una partícula comenzando en p está dada por $p(t)$ con

$$p'(t) = E(p(t)), t > 0,$$

y $p(0) = p$. Veamos como evoluciona un paralelepípedo con vértice en p. Sea $h_i(t)$ una de sus tres aristas partiendo en p $(i = 1, 2, 3)$, es decir, $p(t) + h_i(t)$ es un vértice contiguo a $p(t)$ del paralelepípedo. La evolución del sistema dice que

$$p'(t) + h_i'(t) = E(p(t) + h_i(t)) = E(p(t)) + DE(p(t))h_i(t) + o(h_i(t)),$$

usando el desarrollo de Taylor. Despreciando el último término (suponiendo que el paralelepípedo es muy pequeñito) tenemos que

$$h_i'(t) = DE(p(t))h_i(t), t > 0,$$

con la condición inicial $h_1(0) = (\epsilon, 0, 0)$, $h_2(0) = (0, \epsilon, 0)$ y $h_3(0) = (0, 0, \epsilon)$ y $\epsilon > 0$ pequeño.

Interpretemos ahora la divergencia. El volumen del paralelepípedo viene dado por $V(t) = det(h_1(t), h_2(t), h_3(t))$. La variación del volumen (como crece o decrece, o lo que es lo mismo, si el fluido se expande o contrae) viene dado por

$$V'(0) = det(h_1'(0), h_2(0), h_3(0)) + det(h_1(0), h_2'(0), h_3(0)) + det(h_1(0), h_2(0), h_3'(0)).$$

Usando que

$$DE(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial x_1} & \frac{\partial E_1}{\partial x_2} & \frac{\partial E_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial E_2}{\partial x_1} & \frac{\partial E_2}{\partial x_2} & \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial E_3}{\partial x_1} & \frac{\partial E_3}{\partial x_2} & \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

y $h_i'(0) = DE(p)h_i(0)$, $i = 1, 2, 3$, tenemos que

$$h_i'(0) = \epsilon \begin{pmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial E_2}{\partial x_i} \\ \frac{\partial E_3}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

con lo que

$$V'(0) = \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} \right) \epsilon^3 = divE(p)V(0).$$

Es decir la divergencia mide <u>la tasa de expansión o contracción del fluido</u>. El fluido es incompresible si $divE = 0$.

Interpretemos el rotacional. La aplicación que nos da la variación de $h_i(t)$, $DE(p)$ se descompone en parte simétrica y antisimétrica: $DE(p) = S(p) + R(p)$. La parte antisimétrica es

$$R(p) = \frac{1}{2}(DE(p) - DE(p)^T) = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = rotE = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{vmatrix}$$

Supongamos que no hay parte simétrica, es decir que $S(p) = 0$. Entonces la ecuación $h_i'(t) = R(p(t))h_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, tiene solución que se aproxima en $t = 0$ a primer orden por

$$h_i(t) = \exp(R(p)t)h_i(0)$$

(nótese que la t ha cambiado de sitio). $\exp(R(p)t)$ es un giro con respecto al eje determinado por ξ de ángulo $|\xi|t$ (¡prueba esto, que es fácil!). Luego el paralelepípedo rota y el rotacional da <u>la dirección y la velocidad de giro</u>.

Teorema de la divergencia de Gauss

Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ un dominio regular del espacio, con lo que $S = \partial D$ es una superficie. Denotamos $\mathbf{N}$ al vector normal unitario exterior a S. El teorema de Gauss dice que para todo campo E de clase C^1 en $\bar{D}$ se tiene que

$$\int\int\int_D divE\, dx = \int\int_S < E, \mathbf{N} > d\mu.$$

El producto $< E, \mathbf{N} >$ es la componente normal del vector E a la superficie. La integral $\int\int\int_D f dx$ es una integral de volumen en D, que se hace por Fubini. La integral $\int\int_S f d\mu$ es una integral de superficie. Recordemos que esto se calcula tomando una parametrización (o varias y luego sumando) $\mathbf{x}(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))$ y

$$\int\int_S f = \int\int_{(u,v)} f(u,v) \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right| dudv.$$

De hecho la normal unitaria es

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right|}$$

Ejercicio: Calcular la integral de superficie de la función $f(x_1, x_2, x_3) = x_1$ en la esfera. Si no sabes hacer esto debes repasar Cáculo III.

El teorema de Gauss tiene significado físico: si E es un campo de vectores describiendo el movimiento de un fluido, entonces la integral de superficie es la cantidad de fluido que entra o sale por la superficie (según el signo). La integral en D mide cuando se comprime o expande el fluido en el interior. Obviamente coinciden.