IX. Corriente eléctrica

79. **Un conductor de resistividad ρ tiene la forma indicada en la figura. El radio de la circunferencia exterior es b, el de la interior a y la altura d. Entre ambas circunferencias se aplica una diferencia de potencial V_0. Calcular la corriente que recorre el conductor, resistencia que presenta y el campo existente en el mismo, de forma que el borde interior sea positivo respecto del exterior**

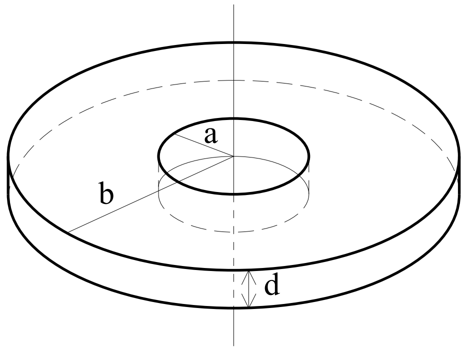

Figura 44: Problema 80.

Solución: Debido a la simetría del conductor y suponiendo que ρ es constante en todo el medio, el valor de la densidad de corriente será el mismo para todos los puntos que disten por igual del eje del conductor: $J(r)$. Su dirección será radial y el sentido desde el borde de la circunferencia interior al de la exterior.

Para calcular la intensidad de corriente elegimos una superficie abierta S_a, puesto que i representa la carga que atraviesa la misma por unidad de tiempo. Sea ésta un cilindro de radio r y de altura d.

$$S_a = 2\pi r d \qquad , \qquad i = \int_{S_a} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = J 2\pi r d$$

ya que J es constante en los puntos de dicha superficie y $\mathbf{J}$ y d$\mathbf{S}$ tienen la misma dirección y sentido.

A partir de la ley de Ohm, tenemos que

$$E = \rho J = \frac{\rho i}{2\pi r d}.$$

Observamos que el campo también presenta una simetría radial: $E(r)$ y que no es constante en el interior del conductor. Además,

$$V_a - V_b = V_0 = \int_a^b E(r) dr,$$

que, una vez sustituido el valor del campo antes encontrado, queda

$$V_0 = \int_a^b \frac{\rho i}{2\pi r d} dr = \frac{\rho i}{2\pi d} \ln \frac{b}{a}$$

$$i = \frac{2\pi d V_0}{\rho} \ln \frac{b}{a}.$$

Teniendo en cuenta la relación de Ohm,

$$R = \frac{\rho}{2\pi d} \ln \frac{b}{a}$$

que representa la resistencia del conductor. Observamos que también en este caso es función sólo de las características del material.

El campo eléctrico, en cualquier punto que diste r del eje del conductor, será

$$\mathbf{E} = \frac{V_0}{r \ln b/a} \mathbf{u}_r$$

donde $\mathbf{u}_r$ es un vector unitario en la dirección radial y dirigido hacia el exterior del conductor.

80. **En el circuito de la figura el voltímetro V_1, que se considera ideal, marca 12 V cuando el interruptor está abierto y 10 V cuando está cerrado. En esta situación, la corriente a través del resistor $R_3 = 2\ \Omega$ vale 0,5 A. Se pide: a) ¿Qué significa que el voltímetro es ideal? ¿Qué condición debe verificar en la práctica el voltímetro para que pueda ser considerado como ideal? b) ¿Por qué cambia la lectura del voltímetro al cerrar el interruptor? c) Calcular la corriente a través del resistor R_2, cuya resistencia es de 6 Ω. d) Resistencia del resistor R_1. e) Resistencia equivalente del circuito. f) Resistencia de la pila. g) Potencia suministrada por la pila al circuito. h) Energía disipada en R_2 durante 10 s.**

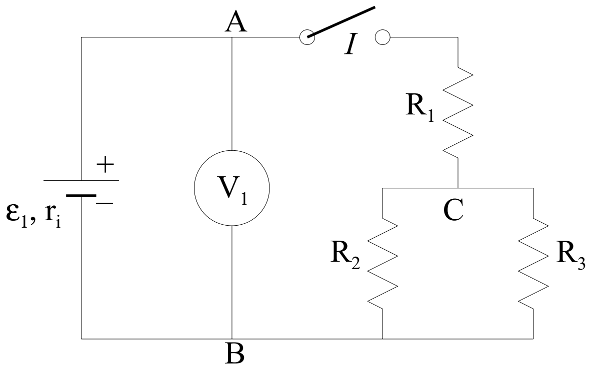

Figura 45: Problema 81. Figura 1.

Solución:

a) Un aparato de medida es ideal cuando su uso no altera el valor de la magnitud que se desea medir. Al conectar un voltímetro entre los extremos de un elemento cuya diferencia de potencial se desea medir, en principio siempre alterará la medida, puesto que el aparato tendrá una cierta resistencia interna R_v. Para visualizarlo, supongamos los dos circuitos, (a) y (b), de la figura 2.

$$i = \frac{\xi}{R + r_i} \qquad , \qquad i' = \frac{\xi}{r_i + \dfrac{RR_v}{R + R_v}}$$

Tendremos $i \neq i'$. Las correspondientes diferencias de potencial entre los puntos A y B serán también distintas (calcúlense como ejercicio). Para que no se altere la medida: $V_A - V_B = (V'_A - V'_B 1)$, no teniendo que pasar corriente a través del voltímetro, lo que ocurre si $R_v = \infty$. Por lo tanto, un voltímetro ideal es aquel que tiene una resistencia interna infinita. Ahora bien, esta condición es imposible de alcanzar en la práctica; un voltímetro real se acercará tanto más a uno ideal, cuando mayor sea R_v frente a R. Mayor significa, desde un punto de vista práctico, exceder por lo menos en un orden de magnitud, es decir en un factor diez. En el ejercicio ha de verificarse, por consiguiente,

$$R_v >> R_{equivalente} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

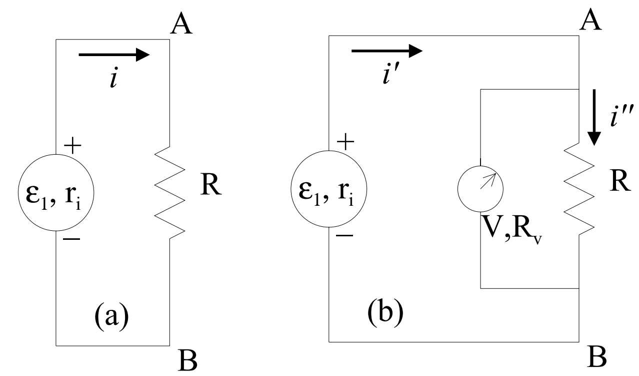

Figura 46: Problema 81. Figura 2.

Al calcular en el apartado e) el valor de esta resistencia equivalente ya veremos cuál debe ser R_v para poder considerar al voltímetro como ideal.

b) Un voltímetro siempre mide la diferencia de potencial que existe entre los puntos donde se conecta. Cuando el interruptor está abierto la diferencia de potencial entre los extremos de la pila es *numéricamente igual* a su fuerza electromotriz. Al cerrarlo marca la diferencia de potencial existente entre dichos extremos. Por lo tanto: $\xi_1 = 12$ V y $V_A - V_B = 10$ V, cuando el interruptor está cerrado.

c)

$$\left.\begin{array}{l} V_C - V_A = i_3 R_3 = 1 \text{ V} \\ V_C - V_A = i_2 R_2 \end{array}\right\} \quad i_2 = 1/6\text{A}$$

Por lo tanto, la corriente total a través del circuito, que es la que pasa por R_1, es:

$$i = i_2 + i_3 = \frac{2}{3}\text{A}$$

d) La diferencia de potencial entre los extremos de R_1 será

$$V_B - V_C = (V_B - V_A) - (V_C - V_A) = 9\text{V}$$

y

$$V_B - V_C = iR_1 \qquad , \qquad R_1 = \frac{27}{2}\Omega$$

e) Los resistores R_2 y R_3 se encuentran en paralelo y el conjunto de ellos en serie con R_1, por lo tanto

$$R_2||R_3 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

$$R_{equivalente} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 15\ \Omega$$

Volviendo al apartado a), $R_v > 150\Omega$. Este resultado es bastante teórico ya que en la práctica los resistores tienen valores mayores. Un voltímetro estándar suele tener una resistencia interna del orden de los cientos o miles de kΩ

f) Sabemos que

$$V_B - V_A = \xi - ir \qquad , \qquad r = \frac{\xi - (V_B - V_A)}{i} = 3\ \Omega$$

El resultado es un tanto absurdo, ya que las resistencias internas de las pilas suelen ser mucho más bajas, mientras que en este problema, a causa de los valores elegidos, sale del orden de las resistencias exteriores. Los valores típicos suelen encontrarse entre las décimas y las unidades de ohmio.

g) La potencia que suministra realmente la pila al circuito, es decir la realmente aprovechable, vale

$$P = (V_B - V_A)i = \frac{20}{3}\text{W}.$$

La que disipa en su resistencia interna es

$$P_1 = i^2 r_i = \frac{4}{3}\text{W}$$

que representa, para este ejemplo, una pérdida considerable:

$$\frac{P_1}{P} = 0,2$$

Se trata de una pila no muy recomendable, ya que su rendimiento en la transformación de energía química en eléctrica es bajo

h) Energía disipada en R_2 durante 10 s:

$$E_d = i_2^2 R_2 t = \frac{5}{3}\text{J}$$

81. **Dispone usted de tres bombillas iguales de 60 W-120 V. Si dispone de un acumulador como fuente de corriente, y se desea alumbrar simultáneamente las tres bombillas de forma que la carga del acumulador le dure el mayor tiempo posible. Entre una conexión en serie y otra en paralelo, ¿cuál escogería?**

Solución: La expresión de la potencia disipada por un elemento de resistencia, como pueda ser una bombilla, es

$$P = (V - V')^2/R$$

siendo $V - V'$ la diferencia de potencial entre sus extremos. La bombilla se caracteriza por la máxima potencia que puede disipar, en este caso 60W, así como por la diferencia de potencial que hay que aplicar entre sus extremos para que disipe dicha potencia. Si es así, la bombilla luce con su máxima luminosidad; con una menor tensión, lucirá menos. Sustituyendo valores en la expresión anterior obtenemos $R = 240\Omega$. Veamos ahora la diferencia entre las dos disposiciones que nos sugiere el problema.

Si las colocamos en serie, la tensión de 120V se aplica al conjunto de las tres,

$$120 = 3Ri \quad , \quad i = 0,17\text{A}$$

La potencia disipada en cada una de ellas será,

$$P = iR^2 = 6,80\text{W}$$

Por el contrario, en una conexión en paralelo la tensión de 120V se aplica a cada bombilla por separado

$$120 = Ri \quad , \quad i = 0,50\text{A}$$

y cada una de ellas disipará 60W. Está claro que en este caso las bombillas lucirán más, aunque, la disipación siendo mayor, descargará antes el acumulador. Nos interesa, por lo tanto, la conexión en serie.