# TRAZADO DE LINEAS EQUIPOTENCIALES

***Líneas Equipotenciales:*** lugar geométrico donde el potencial eléctrico toma el mismo Valor.

$$\nabla . \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$ **Ley de Gauss**

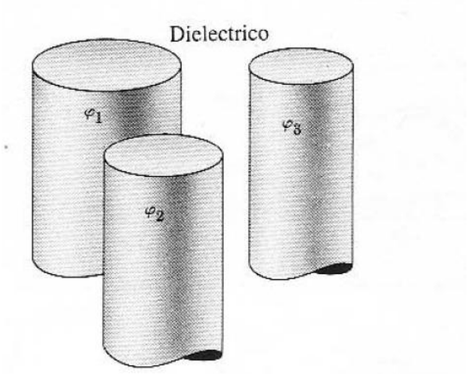
**Campos Electrostáticos**

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \vec{E} = -\nabla \Phi \end{array} \right. \Rightarrow \nabla . \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

**Ecuación de Laplace** $$\boxed{\nabla^2 \Phi = 0}$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

$$\Phi = \Phi(x, y, z)$$



# Resolución de la Ecuación de Laplace

## Métodos analíticos

- *Métodos de la imágenes*
- *Separación de Variables*

## Métodos aproximados

- *Método analógicos (experimental).*
- *Métodos Numéricos (método de relajación).*

# Método Analógico

**Ecuación de Continuidad** $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . \vec{j} = 0$$

**Corrientes estacionarias** $$\mathrm{Div}\, \vec{\mathrm{j}} = \nabla . \vec{j} = 0$$

**Densidad de corriente**

$$dI = \vec{j} . \check{n} dA$$

**Ley de Ohm** $$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$\sigma$=Conductividad

$$\mathrm{Div}\, \vec{\mathrm{j}} = \nabla . \left( \sigma \vec{E} \right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla . \vec{E} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \qquad \vec{E} = -\nabla \Phi$$

**Campos Electrostáticos**

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

**Ecuación de Laplace**

***El potencial en el conductor (corrientes Estacionarias) cumple la ecuación de Laplace.***

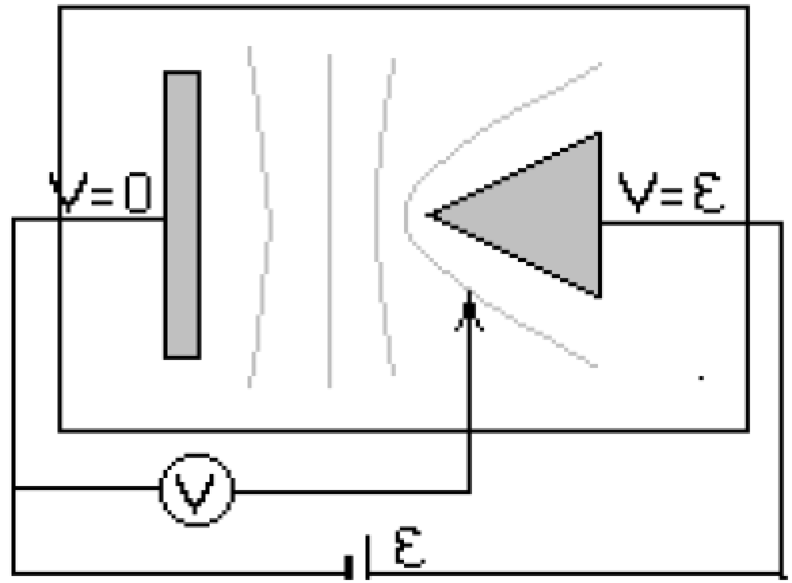
$$\vec{E}_{electrostatico} \Longleftrightarrow \vec{J}_{conductor}$$

$$\Phi_{electrostatico} \Longleftrightarrow \Phi_{conductor}$$

# Método Analógico

$\vec{E}_{electrostatico} \Leftrightarrow \vec{J}_{conductor}$

$\Phi_{electrostatico} \Leftrightarrow \Phi_{conductor}$




$$\nabla^2\Phi = 0$$

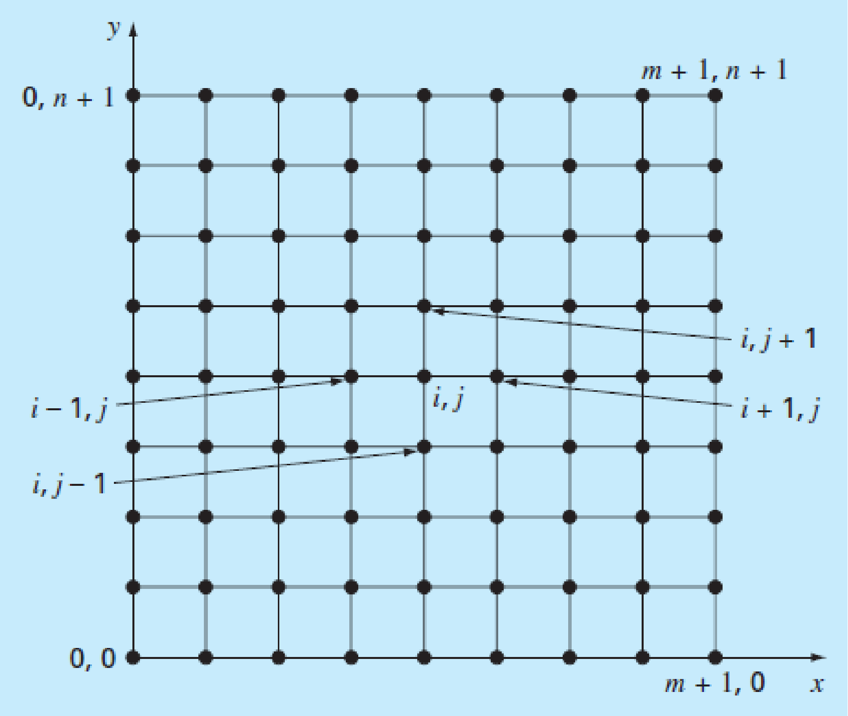
*Por medio de mediciones de potencial mediante tester en régimen de corrientes estacionarias resolvemos la ecuación de Laplace.*

Las *líneas de campo* son perpendiculares a *líneas equipotenciales* (L.E.)

$$\left|\vec{E}\right| \approx \left|\frac{V(x_2) - V(x_1)}{\Delta x}\right|$$

Menor separación de L.E., implica mayo intensidad del campo eléctrico.

# Método de Relajación




*Malla para la solución por diferencias finitas de la ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$ ***Ec. de Laplace***

$$\Delta x = \Delta y = d$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2d} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cong \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j-1}}{2d}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cong \frac{\dfrac{\Phi_{i+2,j} - \Phi_{i,j}}{2d} - \dfrac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i-2,j}}{2d}}{2d} = \frac{\Phi_{i+2,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-2,j}}{4d^2}$$

$$= \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{d^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cong \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{d^2} \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cong \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{d^2}$$

$$\frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{d^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{d^2} = 0 \Longrightarrow \Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j+1} - 4\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1} = 0$$

Se resuelve en forma Iterativa-> ***Met. Relajación***

$$\boxed{\Phi_{i,j} = \frac{\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1}}{4}}$$

$\Phi_{i,j}$ que satisface la ecuación de Laplace

# Método de Relajación

## Condiciones de Borde

### Condiciones de borde de Dirichlet

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{contorno}}(\mathbf{conductor}) = \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{contorno}}(\mathbf{grafito})$$

### Condiciones de borde de Neumann

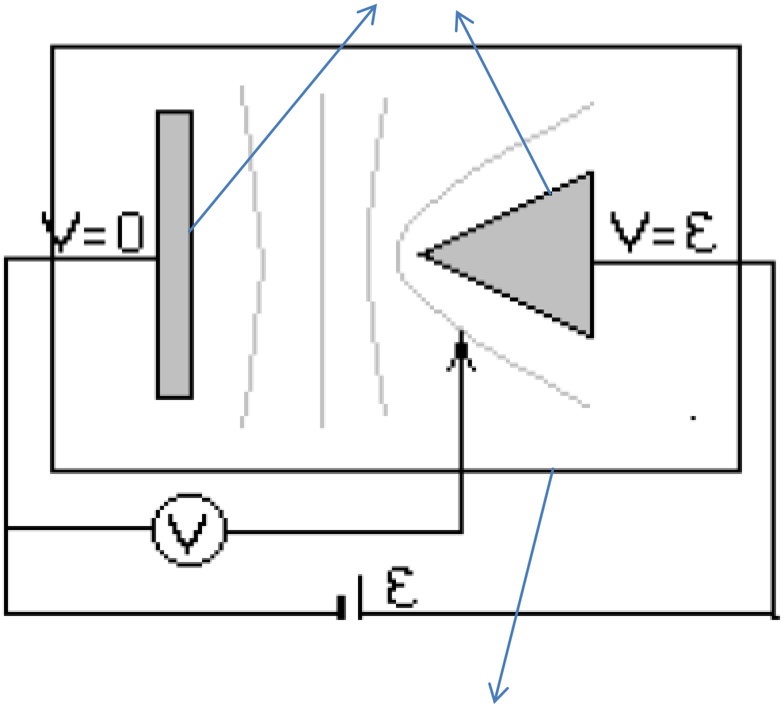
$$J_n\big|_{borde} = 0$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$$

$$J_n\big|_{borde} = \sigma \cdot E_n\big|_{borde} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_n\big|_{borde} = 0$$

$$E_t\big|_{borde} \neq 0$$

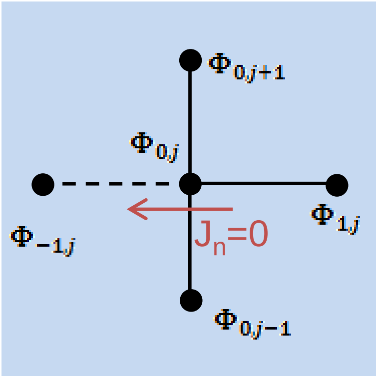
Contorno de conductor-> Dirichelt




Contorno de grafito=> Neumann
(condición de continuidad entre
Conductor y dieléctrico)

# Condiciones de borde de Neumann

## En extremos de la placa:




$$\Phi_{1,j} + \Phi_{-1,j} + \Phi_{0,j+1} + \Phi_{0,j-1} - 4\Phi_{0,j} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cong \frac{\Phi_{1,j} - \Phi_{-1,j}}{2d} \qquad \Phi_{-1,j} \cong \Phi_{1,j} - 2d\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

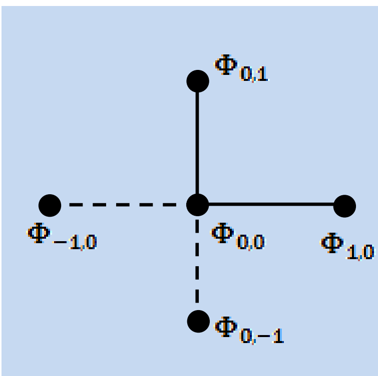
$$2\Phi_{1,j} - 2d\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Phi_{0,j+1} + \Phi_{0,j-1} - 4\Phi_{0,j} = 0$$

$E_n=0$ $\quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\Phi_{0,j} = \frac{2\Phi_{1,j} + \Phi_{0,j+1} + \Phi_{0,j-1}}{4}}$$

C.B. Extremos

## En esquinas de la placa: (i=0, j=0)




$$2\Phi_{1,0} - 2d\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Phi_{0,1} + \Phi_{0,-1} - 4\Phi_{0,0} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \cong \frac{\Phi_{1,0} - \Phi_{-1,0}}{2d} \qquad \Phi_{0,-1} \cong \Phi_{0,1} - 2d\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$2\Phi_{1,0} - 2d\frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2\Phi_{0,1} - 2d\frac{\partial \Phi}{\partial y} - 4\Phi_{0,0} = 0$$

$E_n=0$ $\quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \Rightarrow 4\Phi_{0,0} = 2\Phi_{1,0} + 2\Phi_{0,1} \Rightarrow$

$$\boxed{\Phi_{0,0} = \frac{\Phi_{1,0} + \Phi_{0,1}}{2}}$$

C.B. Esquinas