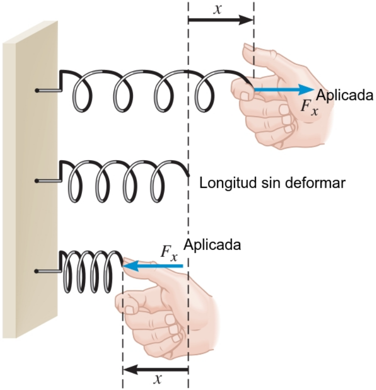
Elasticidad y movimiento armónico simple

Definimos un **resorte ideal**, como aquel que se comporta de acuerdo a la **ley de Hooke**

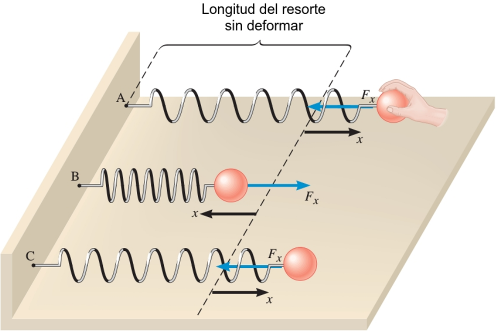
$$\boxed{F_x^{Aplicada} = k\,x}$$



donde x es el desplazamiento a partir de la posición de equilibrio y k es la denominada <u>constante elástica del resorte</u>, la cual tiene unidades de N/m en el S.I. y da una idea de la "rigidez del resorte"

El resorte ejerce una fuerza de igual magnitud y sentido contrario sobre el objeto en contacto. Esta fuerza restauradora se la conoce como **fuerza elástica**:

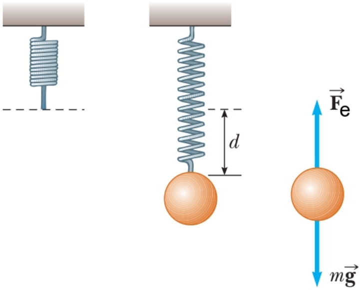
$$\boxed{F_e = -k\,x}$$



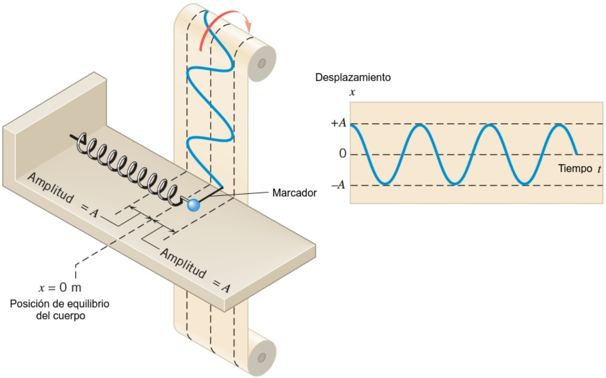
- La fuerza elástica no es constante, cambia con el desplazamiento
- Si la fuerza elástica es la fuerza neta, resulta un movimiento con aceleración no constante

$$F_x = -k\,x \qquad\qquad F_x = m\,a_x$$

Un resorte se estira 2.0 cm por un objeto suspendido que tiene una masa de 0.55 kg, ¿cuál es la constante de fuerza del resorte?



El movimiento de un objeto oscilante sometido a una fuerza restauradora, hace que el objeto se desplace ida y vuelta en torno de una posición de equilibrio. Si el movimiento es simétrico en torno a la posición de equilibrio, se lo denomina **movimiento armónico simple (M.A.S)**



Planteando la 2da ley de Newton para el sistema se tiene

$$\sum F_x = -k\,x = m\,a = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\left(\frac{k}{m}\right)}_{cte\,=\,\omega^2} x = 0}$$

Ecuación del M.A.S

La solución general a la ecuación del M.A.S viene dada por

$$\boxed{x(t) = A\,sen(\omega t + \phi) \longleftarrow \textbf{Posición M.A.S}}$$

y nos permite conocer la posición del cuerpo para todo tiempo. A partir de esta ecuación podemos obtener las expresiones para la velocidad

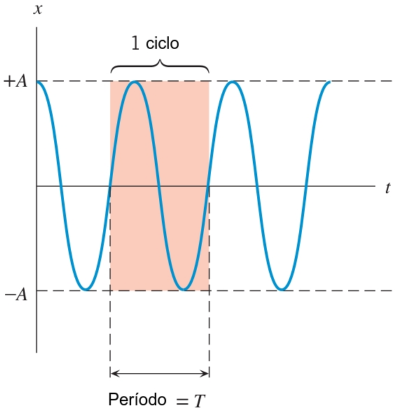
$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt} = A\,\omega\,cos(\omega t + \phi) \longleftarrow \textbf{Velocidad M.A.S}}$$

y la aceleración

$$\boxed{a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\,\omega^2\,sen(\omega t + \phi) \longleftarrow \textbf{Aceleración M.A.S}}$$

Para particularizar la solución general a un problema dado, debemos encontrar los valores de las constantes A, ω y ϕ

Vamos a definir ciertas magnitudes útiles a la hora de estudiar un **M.A.S**



$$\boxed{f = \frac{1}{T}} \qquad \boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}}$$

Amplitud (A): máximo desplazamiento respecto de la posición de equilibrio. Unidades S.I. (m)

Período (T): tiempo requerido para completar un ciclo. Unidades S.I. (s)

Frecuencia (f): número de ciclos por unidad de tiempo. Unidades S.I. (Hz)

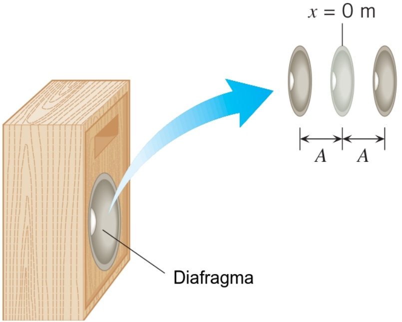
Frecuencia angular (ω): Se obtiene a través de la ecuación del M.A.S. Unidades S.I. (rad/s)

Ángulo de fase (ϕ): Se obtiene a través de las condiciones iniciales al igual que la amplitud

El diafragma de un parlante se mueve hacia adelante y hacia atrás, realizando un M.A.S para generar sonido. La frecuencia del movimiento de de 1.0 kHz y la amplitud del movimiento es de 0.20 mm.

(a) ¿Cual es la máxima velocidad de diafragma ?

(b) ¿En que posición ocurre la máxima velocidad?



(a)
$$v(t) = A\,\omega\,\underbrace{cos(\omega t + \phi)}_{max=1}$$

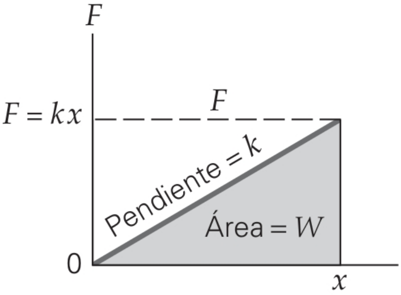
$$\boxed{v_{max} = A\,\omega = A\,(2\pi f) = 1.3\ m/s}$$

(b)
$$cos(\omega t + \phi) = 1 \longrightarrow (\omega t + \phi) = 0$$

$$\boxed{x_{v_{max}} = A\ \overset{0}{\cancel{sen(\omega t + \phi)}} = 0\ m}$$

Así como el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria y definimos la energía potencial gravitatoria, ahora vamos a calcular el trabajo realizado por la fuerza elástica.

Como vimos anteriormente, el trabajo de una fuerza podemos obtenerlo calculando el área bajo la curva $F\ cos(\theta) vs\ x$



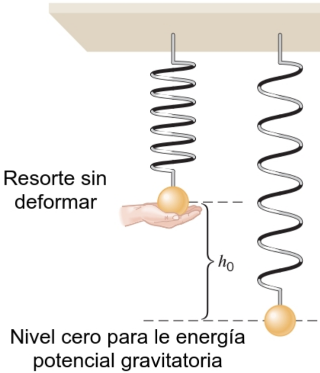
$$W_{F_e} = \frac{1}{2}(x)(kx) = \frac{1}{2}kx^2$$

Definimos entonces la energía potencial elástica

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2}kx^2}$$

Es la energía que un resorte tiene en virtud de estar comprimido o estirado.

Una esfera de 0.20 kg está unida a un resorte vertical. La constante del resorte es 28 N/m. Si se la abandona desde el reposo en la posición de equilibrio, ¿cuán lejos baja, antes de detenerse momentáneamente?



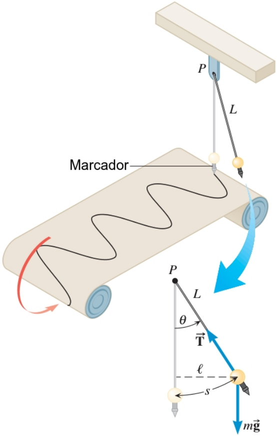
$$\Delta E_m = 0 \longrightarrow E_f = E_0$$

$$E_0 = \cancelto{0}{\frac{1}{2} m v_0^2} + \cancelto{0}{\frac{1}{2} k x_0^2} + m g h_0$$

$$E_f = \cancelto{0}{\frac{1}{2} m v_f^2} + \frac{1}{2} k h_0^2 + \cancelto{0}{m g h_f}$$

$$\frac{1}{2} k h_0^2 = m g h_0 \longrightarrow \boxed{h_0 = 0.14\, m}$$

Otro ejemplo de un M.A.S viene dado por el **Péndulo simple**, el cual consiste en una partícula de masa m unida a un pivote sin fricción por un cable de masa despreciable y longitud L.



En el péndulo simple, la fuerza restauradora es la fuerza gravitatoria y para pequeños ángulos, la frecuencia angular viene dada por

$$\boxed{\omega_{\text{péndulo}} = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

$$\boxed{\omega_{\text{masa-resorte}} = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

La figura muestra un reloj antiguo que utiliza un péndulo para determinar el tiempo. Calcule la longitud necesaria del péndulo simple para que oscile con un período de 1.00 s

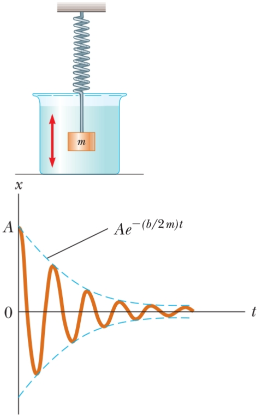
$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(1.00\, s)^2\, (9.81\, m/s^2)}{4\pi^2}$$

$$\boxed{L = 0.25\, m}$$

Oscilaciones amortiguadas

En muchos sistemas reales, fuerzas no conservativas como la fricción retardan el movimiento. En consecuencia, la energía mecánica del sistema disminuye en el tiempo y se dice que el movimiento está **amortiguado**.



Planteando la 2da ley de Newton para el sistema se tiene

$$\sum F_x = -k\,x \underset{\text{Amortiguamiento}}{\boxed{-b\,\frac{dx}{dt}}} = m\,a = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Ec. del movimiento oscilatorio amortiguado

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{b}{m}}\frac{dx}{dt} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$$

$$\boxed{x(t) = Ae^{(-b/2m)t}\,sen(\omega t + \phi) \longleftarrow \textbf{solución}}$$