

## TEORÍA ESTADÍSTICA DE ERRORES

### 1. Teoría estadística de errores

En la sección anterior, se estudió como inciden los errores sistemáticos y de apreciación en los resultados de una medición, y no se evaluaron los errores casuales. Como se vio, los primeros pueden minimizarse luego de un cuidadoso estudio del proceso de medición. Es momento de analizar la incidencia e importancia de los errores casuales o estadísticos en una medición. Para determinar la magnitud de este tipo de errores, se requiere que la medición se realice varias veces en las mismas condiciones. Si los errores casuales son significativamente menores a los de apreciación, se asegura que todas las mediciones “caerán” dentro del intervalo de incerteza determinado por el error nominal. Es decir, los errores casuales carecerán de relevancia. Caso contrario, si la dispersión es mayor al intervalo de incerteza determinado por la apreciación, aparece el problema que consiste en definir el centro del intervalo de incerteza.

Es necesario aclarar que estos errores aparecen como una *dispersión* de resultados al azar y no pueden tratarse de la forma en que se tratan los errores de tipo sistemático y groseros. Su estudio requiere un tratamiento estadístico, una vez que los errores sistemáticos y groseros han sido debidamente eliminados y/o acotados (se conoce el intervalo de incerteza de cada medición individual y el proceso de medición ha sido optimizado).

Para ilustrar el efecto antes nombrado, supongamos que realizamos sucesivas mediciones del período de un péndulo con un cronómetro digital de apreciación 1/100 segundos, utilizando un fotodiodo (apreciación 1/1000 s) para dispararlo. Al realizar las mediciones, encontraremos que la dispersión de resultados no superará la apreciación del cronómetro, ya que la dispersión promedio será la apreciación del fotodiodo. Así, concluiremos que los errores casuales no son relevantes. Si ahora se realizan las mediciones con el mismo cronómetro digital pero operado esta vez de forma manual, la dispersión será sensiblemente mayor a la apreciación del cronómetro. ¿Cómo podemos minimizar dicha dispersión? Obviamente, nunca puede reducirse a cero el intervalo de incerteza, ya que el error es inherente al proceso de medición. Tampoco puede mejorarse la precisión de un instrumento midiendo con él muchas veces. Cuando se mide repetidamente una magnitud, se busca minimizar los errores casuales, para que alcancen valores mucho menores que la apreciación del instrumento.

Entonces, los problemas que se presentan al enfrentar este tipo de errores son: 1) determinar cuál es el valor más representativo de una serie de mediciones, y 2) determinar el número  $N$  de mediciones necesarias para que los errores casuales no introduzcan una incerteza mayor que la apreciación del instrumento.

La herramienta que se utiliza en el estudio de este tipo de errores es la estadística, que se basa en 3 postulados básicos (Gauss):

- **POSTULADO I:** dada una serie de mediciones  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , la mejor estimación de la magnitud medida, o valor más probable de la misma, es el promedio aritmético de todas las mediciones de esa cantidad, efectuadas en las mismas condiciones.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (1.1)$$

- **POSTULADO II:** es igualmente probable cometer errores del mismo valor numérico y distinto signo.
- **POSTULADO III:** en una serie de mediciones, es tanto más probable un error cuanto menor sea su valor absoluto.

A partir del Postulado I, es posible responder uno de los interrogantes que se habían planteado. El valor más representativo de la cantidad medida (y que tomaremos como el valor medido) es  $\bar{x}$ .

## 2. Error estadístico de una serie de N medidas

Para evaluar la calidad de una serie de N medidas, se debe tener en cuenta si las sucesivas mediciones son parecidas entre sí o, si se prefiere, más parecidas al valor medio  $\bar{x}$ . Para comenzar a responder a esto, debe definirse la desviación de una lectura.

Se denomina  $\varepsilon_i$  a la *desviación* de la medición  $i$ , respecto del valor medio  $\bar{x}$ :

$$\varepsilon_i = \bar{x} - x_i \quad (2.1)$$

Si tenemos N mediciones, tendremos N valores de  $\varepsilon_i$ . Se podría postular que si se calcula la sumatoria de las desviaciones de cada medida, el resultado nos daría una idea de la desviación de las mediciones. Sin embargo, según el POSTULADO II, como la probabilidad de cometer errores del mismo valor numérico pero distinto signo es la misma, ocurre que, en general, dichos errores se anulan o compensan entre sí (términos positivos y negativos). Si en cambio, se suman los cuadrados de esas desviaciones, la magnitud será más representativa, ya que al elevar al cuadrado cada desviación, estaremos volviendo positivos todos los términos. Así, obtendríamos una mejor idea de las fluctuaciones de las mediciones alrededor del promedio  $\bar{x}$ . Este valor sería  $\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2$ . Aún existe un inconveniente: la sumatoria de las desviaciones al cuadrado depende de la cantidad de mediciones N que se realizan. A mayor cantidad de mediciones, la sumatoria se hace cada vez mayor. Para independizar a la sumatoria de desviaciones al cuadrado, se define la *varianza*:

$$v = \frac{\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2}{N}$$

La varianza ( $v$ ) es el promedio de las desviaciones cuadráticas, y dependerá únicamente de como los datos individuales fluctúan alrededor del promedio.

Como puede verse a partir de un análisis de unidades, la varianza tiene las mismas unidades que los datos originales, pero elevados al cuadrado. Para que la desviación promedio tenga las mismas unidades que los datos que le dieron origen, se aplica la raíz cuadrada a la varianza:

$$\sigma = \sqrt{v} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}{N}} \quad (2.2)$$

Finalmente, se obtiene un valor que puede compararse numéricamente con el valor promedio, ya que tiene sus mismas unidades.  $\sigma$  se denomina *desvío estándar* o *error medio cuadrático de las lecturas*. Depende únicamente del proceso de medición, y nos da una idea cabal y acertada de las fluctuaciones de las medidas alrededor del valor medio.

En forma análoga al error relativo, es posible también definir la *desviación relativa*:

$$e_r = \frac{\sigma}{\bar{x}} \quad (2.3)$$

Y *desviación relativa porcentual*:

$$e_r \% = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (2.4)$$

La desviación relativa no tiene dimensiones y pone de manifiesto de forma clara el concepto de dispersión. Cuando decimos que una medición tiene una dispersión del 10%, tenemos más información que la que obtendríamos si informáramos solo el desvío estándar, ya que si ese 10% representara por ejemplo, 10 cm en la medición de una longitud, la medición sería buena si la longitud a medir fuera de 100 m, pero no si fuera de 20 cm.

De forma conceptual, la dispersión  $\sigma$  refleja cual es la probabilidad de que una nueva medición individual se aparte en mayor o menor medida del valor medio calculado. Pero debido a que el objetivo es hacer que la información sea intercambiable (utilizada por otros, o por el mismo observador midiendo en las mismas condiciones), debe establecerse también en qué medida el nuevo valor medio que se obtenga puede apartarse del obtenido anteriormente.

Cuando se trata de errores casuales, puede demostrarse (no lo haremos aquí) que el denominado *error estadístico* se calcula:

$$E_{est} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (2.5)$$

A partir de su definición, resulta claro que  $E_{est}$  depende de  $N$ . Es posible disminuir  $E_{est}$  aumentando el número de mediciones, pero nunca, desde el punto de vista físico, puede ser cero. El mejor balance se logra cuando  $E_{est} \approx E_{ap}$ . De esa forma, aseguraríamos que el error estadístico no es mayor al error de apreciación del instrumento utilizado (dicho de otra forma, el intervalo de incerteza estadístico sería menor al intervalo de incerteza determinado por la apreciación del instrumento). Utilizando este concepto, puede calcularse la cantidad óptima de mediciones ( $N_{op}$ ) que deberían realizarse para cumplir con la condición impuesta anteriormente:

$$N_{op} \approx \left( \frac{\sigma}{E_{ap}} \right)^2$$

**Observación:** como no tiene sentido disminuir  $E_{est}$  más allá de la apreciación del instrumento de medición, es preferible cambiar el instrumento o mejorar el método que aumentar el número de mediciones. Es deseable obtener 20 buenas mediciones y no 1000 que sean mediocres.

### 3. Error final o efectivo de la medición

Al combinar los errores sistemáticos (o nominales) con los estadísticos, se obtiene el error final o efectivo de la medición. Si se está midiendo una magnitud  $L$ , entonces

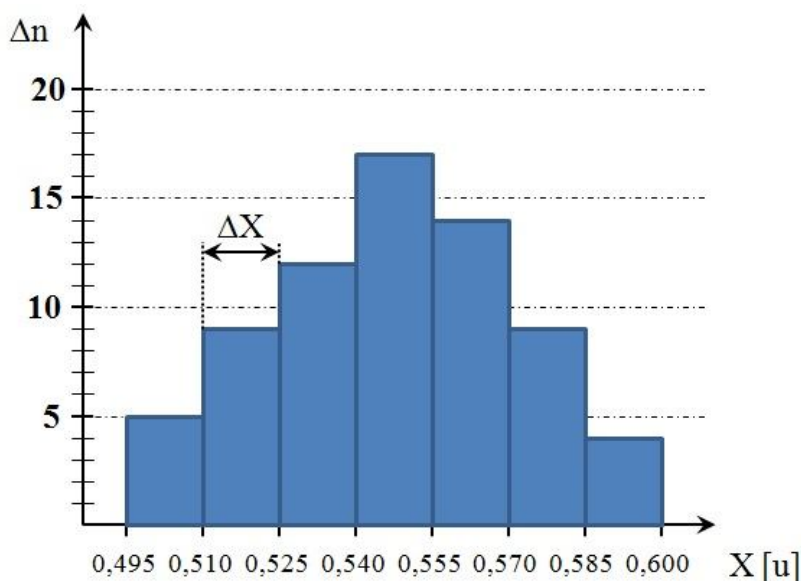
$$E_L = \sqrt{E_{nom}^2 + E_{est}^2} \quad (3.1)$$

Nuevamente, se realiza la suma de los errores al cuadrado, siguiendo el mismo criterio estadístico que afirma que esto puede hacerse cuando los errores son independientes entre sí.

### 4. Histogramas

Cuando se desea representar los resultados de un gran número de datos obtenidos experimentalmente, es necesario suministrar información adicional, ya que el valor numérico de  $E_{est}$  depende de la *distribución* de los valores medidos. Los histogramas son un método eficiente y común para representar la dispersión de gran cantidad de resultados ( $x_1, x_2, \dots, x_N$ ). Un **histograma** es una gráfica de barras verticales u horizontales. Dichas barras se comportan como categorías o intervalos de valores de la variable medida, y se definen de forma tal que cada una de las  $N$  mediciones forme parte de una y solo una categoría. El ancho de cada barra ( $\Delta x$ ) es igual y fijo, y como consecuencia de esto, el área de la barra es proporcional al número de observaciones de la clase respectiva ( $\Delta n$ ) que pertenecen al intervalo seleccionado. Así, la gráfica presenta un despliegue visual de los datos, que

facilita las comparaciones y aporta información valiosa de la densidad que tiene la variable que se estudia.



**Figura 4.1.** Histograma típico

Como se puede apreciar en la Figura 4.1, en los histogramas se grafican las frecuencias de aparición ( $\Delta n$ ) de los valores dentro de un intervalo de ancho fijo ( $\Delta x$ ). Dentro de cada intervalo o *rango de clase*, se agrupan los valores medidos. Si la forma del histograma presenta una barra central que se rodea a ambos lados con barras decrecientes, y además, existe cierta simetría, se dice que la distribución es normal o gaussiana.

#### 4.1. Construcción de histogramas

Para la construcción de un histograma, deben seguirse simples pasos, que se detallan a continuación:

##### Paso 1

Teniendo en cuenta los valores máximo y mínimo de las observaciones, se calcula el rango de los datos, que no es otra cosa que la diferencia entre dichos valores:

$$Rango = x_{max} - x_{min}$$

##### Paso 2

Se calcula el ancho de intervalo  $\Delta x$  necesario para cubrir el rango antes calculado:

$$\Delta x = \frac{Rango}{\sqrt{N}} = \frac{x_{max} - x_{min}}{\sqrt{N}} \quad \text{o} \quad \Delta x = \frac{Rango}{n^{\circ} \text{ barras}} = \frac{x_{max} - x_{min}}{n^{\circ} \text{ barras}}$$

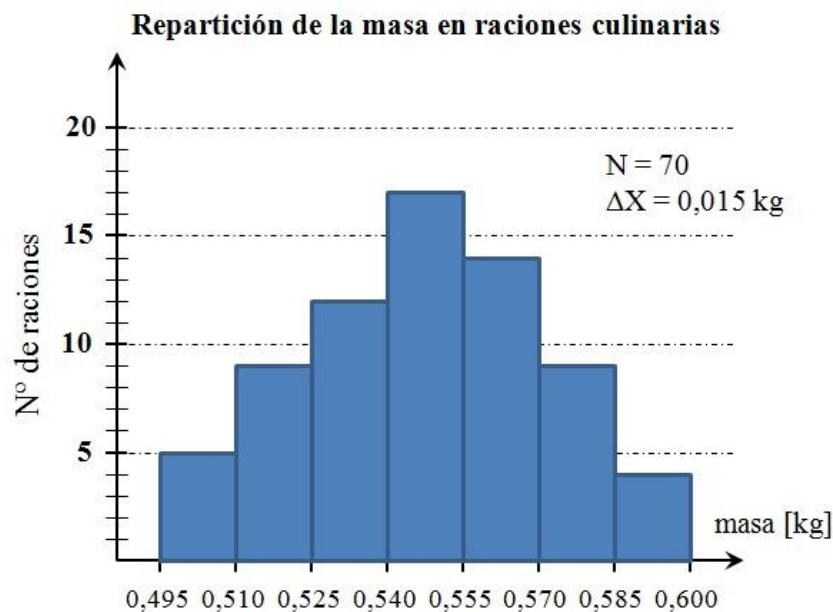
Dependiendo del caso en particular que se analice, puede seleccionarse una u otra forma de calcular  $\Delta x$ , pero las presentadas son las dos formas más habituales. Es importante recordar acotar el valor de  $\Delta x$  obtenido, teniendo en cuenta las cifras significativas.

### Paso 3

Construir una tabla de intervalos-frecuencia ( $\Delta n$ ). Cada barra representará un intervalo y la altura de la barra será la cantidad de valores  $\Delta n$  que se encuentren comprendidos dentro de él. Los intervalos pueden considerarse cerrado-abierto (más frecuente) o abierto-cerrado. Por ejemplo, el primer intervalo tomará como punto inicial el valor mínimo de las N mediciones, y como punto final la cantidad resultante de sumar  $x_{min} + \Delta x$ . Los demás intervalos se construyen de manera similar. Seguidamente, se contarán los valores que caen dentro de cada intervalo y se ingresan en la tabla.

### Paso 4

Realizar la gráfica de la tabla en un sistema de ejes ortogonales. En las abscisas se colocarán los intervalos y en las ordenadas las frecuencias correspondientes.



**Figura 4.2.** Histograma de repartición de la masa en raciones

El gráfico debe llevar título en la parte superior y en el centro. Los parámetros N y  $\Delta x$  deben estar especificados del lado derecho (Figura 4.2).

En las ordenadas deben utilizarse las frecuencias de observación, aunque es igualmente válido utilizar las *frecuencias relativas*. Estas se calculan dividiendo las frecuencias de observación por la

cantidad  $N$  de observaciones realizadas:  $\Delta n/N$ . Si se utiliza la frecuencia absoluta, el gráfico de barras se llamará *histograma de frecuencia*, mientras que si se utiliza la frecuencia relativa por clase, se denominará *histograma de frecuencias relativas*.

#### 4.2. Distribución de Gauss

El histograma de una serie de  $N$  mediciones puede aproximarse por una función continua bien definida y única, que siempre tiene la misma forma, y que dependerá de los parámetros de cada caso. Los datos estarán distribuidos alrededor del valor promedio. Muchos estarán cerca y algunos pocos estarán lejos.

Experimentalmente, se comprueba que  $\Delta n$  (el número de valores numéricos que están contenidos en un intervalo de ancho  $\Delta x$ ) depende del valor de  $x$  y de la longitud del intervalo  $\Delta x$  de la siguiente forma aproximada:

$$\Delta n \cong \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}\right) \Delta x \quad (4.1)$$

Cuanto más pequeño sea el valor de  $\Delta x$  y mayor sea  $N$ , la aproximación será mejor. La ecuación 4.1 se transforma en igualdad cuando se plantea en diferenciales  $dn$  y  $dx$ . El valor de  $N$  sólo es un factor de escala (no modifica la forma de la curva), mientras que  $\sigma$  y  $\bar{x}$  son parámetros, siendo  $\sigma$  la desviación estándar de la serie de mediciones y  $\bar{x}$  el valor medio.

Si se aplica el límite a la ecuación 4.1, se obtiene la denominada *densidad de observaciones*:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta n}{\Delta x} = \frac{dn}{dx} = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.2)$$

En la ecuación 4.2,  $dn$  es la cantidad de observaciones cuyos valores están comprendidos entre  $x$  y  $x + dx$ . La variable  $x$  del exponente se encuentra en el intervalo  $dx$  que tiene una frecuencia de observaciones  $dn$ . La representación gráfica de la densidad de observaciones recibe el nombre de *distribución de Gauss* (Figura 4.3). La distribución permite calcular el número de observaciones en función de  $x$  y es la integral de la expresión anterior.

La curva de Gauss tiene un máximo en  $x = \bar{x}$  y es simétrica respecto a ese valor medio, presentando una forma de campana característica. Además, tiene puntos de inflexión ubicados en  $\bar{x} \pm \sigma$ , sus valores tienden a cero a medida que se aleja del promedio.

Dicho todo esto, ¿para que se utiliza la función de Gauss? Si bien es imposible predecir el valor exacto que saldrá de una medición posterior en las mismas condiciones, se puede decir algo sobre

la probabilidad de que algún valor esté comprendido en un intervalo dado. Allí es donde la función de Gauss tiene su principal utilidad. La probabilidad (por definición) es el cociente entre el número de casos  $\Delta n$  de un intervalo seleccionado (comprendido entre dos valores de  $x$ ) y el número total de datos ( $N$ ). La probabilidad de que un valor dado caiga entre  $\bar{x} - \sigma$  y  $\bar{x} + \sigma$  es del 68%:

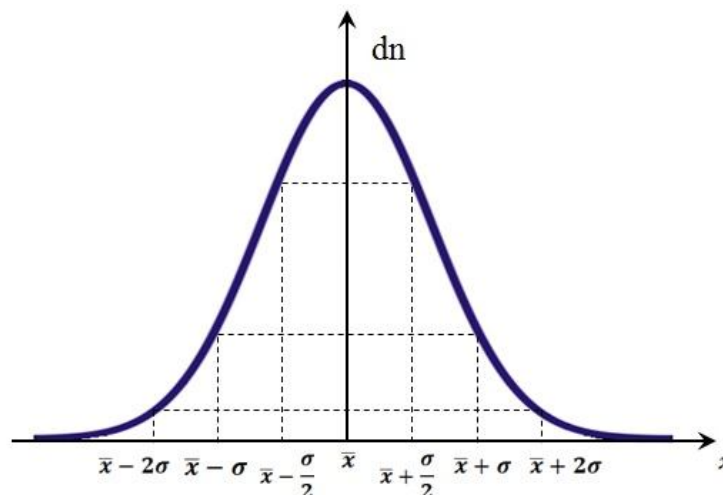
$$\frac{\Delta n}{N} \cdot 100\% = \left[ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{x}-\sigma}^{\bar{x}+\sigma} \exp\left(-\frac{(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}\right) dx \right] \cdot 100\% = 68\%$$

El valor  $\mu$  que determina el intervalo  $\bar{x} \pm \mu$  dentro del cual se encuentran el 50% de las observaciones se denomina error más probable del promedio. Para obtener el valor de  $\mu$ , debe realizarse una integración similar a la anterior, de donde resulta que  $\mu \cong \left(\frac{2}{3}\right)\sigma$ .

Para graficar la curva de Gauss se requiere calcular ciertos puntos característicos de la ecuación 4.1 (puntos de inflexión y sus frecuencias absolutas). Lo más recomendado es confeccionar una tabla con dichos puntos. La tabla 4.1 muestra el valor del término exponencial en los puntos característicos de la curva de Gauss.

**Tabla 4.1.** Puntos característicos de la curva de Gauss

| $x_i$                  | $e\left(-\frac{(\bar{x}-x_i)^2}{2\sigma^2}\right)$ |
|------------------------|--|
| $\bar{x}$              | 1  |
| $\bar{x} \pm \sigma/2$ | $e^{-1/8}$   |
| $\bar{x} \pm \sigma$   | $e^{-1/2}$   |
| $\bar{x} \pm 2\sigma$  | $e^{-2}$   |



**Figura 4.3.** Curva de distribución normal o de Gauss



**REFERENCIAS**

- *Introducción a la Teoría de Errores de Medición*, Dra. E. Gonzalez, Dra. P. Jasen – Cátedra de Física I (UNS).
- *Teoría estadística de errores* – Dr. Mario Sandoval – Cátedra de Física I (UNS)