Anexo cifras significativas

En el apunte de Introducción a la Teoría de Errores, se definieron las llamadas cifras significativas, y la “reglas” para determinar cuáles cifras de un número son significativas. Esto es aplicable a cualquier número en general. En el caso particular de mediciones, esto tiene importancia, debido a los resultados de una medición deben ser realista y fundamentalmente estar de acuerdo con el instrumento utilizado. El resultado no puede indicar mayor precisión que la que el instrumento puede alcanzar.

¿Qué ocurre cuando determinamos una magnitud de forma indirecta? Claramente, el valor medido surge de la aplicación de una fórmula matemática que relaciona las variables medidas directamente, con la magnitud de interés. El resultado calculado puede tener una gran cantidad de decimales, y no es correcto presentar los resultados de esa forma. Lo mismo ocurre cuando se calcula el error o intervalo de incerteza de una magnitud medida de forma indirecta, utilizando la definición:

$$E_L = \left|\frac{\partial L}{\partial X} E_X\right| + \left|\frac{\partial L}{\partial Y} E_Y\right| + \left|\frac{\partial L}{\partial Z} E_Z\right|$$

En este caso, al igual que en el cálculo del valor medido de una medición indirecta, el resultado puede calcularse con gran cantidad de decimales, situación incompatible con resultados claros.

Para evitar este tipo de problemas, se suelen expresar las incertidumbres o incertezas *con dos cifras significativas*, y solo en casos excepcionales y cuando existe fundamento para ello, es posible usar más. También es usual considerar que la incertidumbre en un resultado de medición afecta solo a la última cifra si es que no se la indica explícitamente. Por ejemplo, si un cronómetro muestra como resultado hasta la centésima de segundo, es razonable suponer que el error es del orden de la centésima de segundo (0,01 seg).

Veamos esto con un ejemplo:

Medición indirecta del volumen de un cilindro

Se mide la altura y el diámetro del cilindro, arrojando los siguientes resultados:

Altura (mm), L	**Diámetro (mm), D**
$24{,}32 \pm 0{,}02$	$7{,}05 \pm 0{,}05$

Donde se tuvo en cuenta solo la apreciación del instrumento (E_{ap}) para determinar el error directo, es decir, se supone que no hay errores groseros, y el único error de tipo sistemático corresponde al instrumento.

El volumen del cilindro se determina mediante la siguiente ecuación, utilizando los valores medidos de diámetro y altura:

$$V_{CIL} = \frac{\pi}{4} D^2 L = \frac{\pi}{4}(7{,}05\ mm)^2(24{,}32\ mm) = 949{,}361653899483\ mm^3$$

Resulta evidente que si bien el resultado del cálculo tiene gran cantidad de decimales, el resultado debe truncarse, pero… ¿cómo?

En primer lugar, los valores de altura y diámetro tienen 2 decimales, así que es razonable que el resultado de V_{CIL} tenga la misma cantidad de decimales:

$$V_{CIL} = 949{,}36\ mm^3$$

¿Qué ocurre con el error de V_{CIL}? Para calcularlo, utilizamos la definición, para lo cual debemos calcular las derivadas parciales respecto de cada variable de la que dependa:

$$\frac{\partial V_{CIL}}{\partial L} = \frac{\pi}{4} D^2 \quad , \quad \frac{\partial V_{CIL}}{\partial D} = \frac{\pi}{2} DL$$

$$E_{V_{CIL}} = \left| \left.\frac{\partial V_{CIL}}{\partial L}\right|_{L_m, D_m} . E_L \right| + \left| \left.\frac{\partial V_{CIL}}{\partial D}\right|_{L_m, D_m} . E_D \right|$$

$$E_{V_{CIL}} = \left| \frac{\pi}{4} D_m^2 . E_L \right| + \left| \frac{\pi}{2} D_m L_m . E_D \right|$$

$$E_{V_{CIL}} = \left| \frac{\pi}{4}(7{,}05\ mm)^2(0{,}02\ mm) \right| + \left| \frac{\pi}{2}(7{,}05\ mm)(24{,}32\ mm).(0{,}05\ mm) \right|$$

$$E_{V_{CIL}} = 0{,}78\ mm^3 + 13{,}47\ mm^3$$

$$E_{V_{CIL}} = 14{,}24\ mm^3$$

Como resultado, se obtendría:

$$V_{CIL} = (949{,}36 \pm 14{,}24)\ mm^3$$

El error relativo porcentual será:

$$e_{\%} = \frac{14{,}24\ mm^3}{949{,}36\ mm^3}\ .100\% = 1{,}5\%$$

El error absoluto ($E_{V_{CIL}}$) tiene 4 cifras significativas.

Pero como se dijo antes, es usual utilizar sólo 2 cifras significativas. Para este caso en particular, corresponde que:

$$E_{V_{CIL}} = 14\ mm^3$$

Ahora, el valor de volumen medido indirectamente debe adecuarse al valor del error (truncamiento), obteniéndose:

$$V_{CIL} = (949 \pm 14)\ mm^3$$

Si se calcula nuevamente el error relativo, se obtiene:

$$e_{\%} = \frac{14\ mm^3}{949\ mm^3}\ .100\% = 1{,}48\%$$

Es decir, el error relativo no se ve afectado de forma importante si escribimos el error con dos cifras significativas y adecuamos el valor medido. No tiene sentido práctico hacerlo con más. ¿Por qué? Volvamos al concepto de error: "determina un intervalo de incerteza centrado en el valor medido".

En el resultado con 4 cifras significativas, la primera cifra significativa (1) nos da un ancho del intervalo de incerteza del orden de diez unidades, la segunda (4) le agrega cuatro unidades, la tercera (2) aumenta el intervalo de incerteza en dos décimas (o dos centésimas de la primera cifra significativa), y la cuarta (4) aumenta el intervalo de incerteza en cuatro centésimas (o cuatro milésimas de la primera cifra significativa), lo que es despreciable frente a las 10 unidades. Es por esto que usualmente se utilizan dos cifras significativas, ya que dichas cifras por sí solas, ya establecen la mayor parte del intervalo de incerteza.

Para finalizar, puede decirse que para la medición realizada, el volumen se ha determinado con 3 cifras significativas, ya que **el número de cifras significativas de la medición es el mayor número de cifras significativas entre el valor medido y el error absoluto**:

$$V_{CIL} = (949 \pm 14)\ mm^3$$