Ondas

1 – Introducción.

- El movimiento ondulatorio aparece en casi todos los campos de la física.
    - Ondas producidas por el viento o algún otro tipo de perturbación sobre la superficie del agua.
    - Oímos un foco sonoro por medio de las ondas (ondas sonoras) que se propagan por el aire o cualquier otro medio material. Las vibraciones del propio foco (cuerda de una guitarra,...) puede constituir una onda llamada estacionaria.
    - Muchas de las propiedades de la luz se explican a través de la teoría ondulatoria, sabiéndose que las ondas luminosas tienen idéntica naturaleza a las ondas de radio, las microondas, las radiaciones infrarrojas y UV y los rayos X (ondas electromagnéticas).
    - También conocemos los devastadores efectos de los terremotos producidos por las ondas sísmicas.

- En este tema se tratarán principalmente las ondas que necesitan de un medio material deformable o elástico para propagarse (ondas mecánicas).
    - Las ondas que se producen en la superficie del agua, las que se propagan por una cuerda y por un resorte, así como las ondas sonoras son mecánicas.
    - Sin embargo las ondas luminosas no serían mecánicas.

1 – Introducción.

- Como en el caso de las oscilaciones, el movimiento ondulatorio se presenta en un sistema con un estado de equilibrio. La onda es una perturbación que aparta al sistema de su posición de equilibrio.
- A diferencia de las oscilaciones, una onda implica el movimiento en numerosos puntos distintos de un sistema. Estos movimientos están acoplados de forma que una perturbación original se transmite a las porciones de materia vecinas y de estas a las siguientes propagándose de este modo por el medio.
- No todos los puntos del medio son alcanzados al mismo tiempo por la perturbación, ya que esta se propaga con una cierta velocidad (velocidad de la onda), de forma que las partículas más alejadas del origen de la perturbación comenzarán a moverse con un cierto retraso.
- El medio mismo no se mueve en su conjunto al progresar la onda. Las partículas del medio realizan movimientos limitados alrededor de sus posiciones de equilibrio. No hay por tanto transporte de materia en el movimiento ondulatorio.
- Para poder poner en movimiento estos medios en los que se propagan las ondas hay que aportar energía al sistema realizando trabajo mecánico sobre él mismo. La onda transporta esta energía de una región del medio a otra. Por tanto, lo único que se transmite en una onda es energía (incluso a distancias considerables).

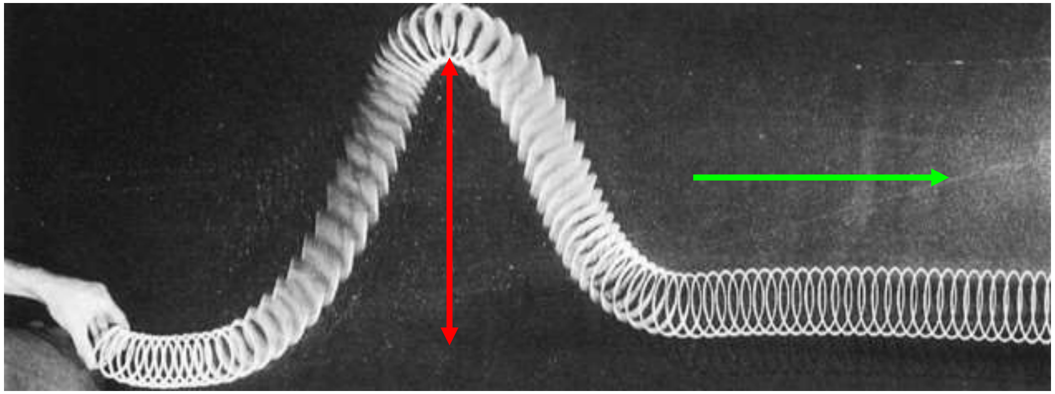
2 – Tipos de ondas.

- Ya que la perturbación que se propaga en un medio puede ser de naturaleza muy diversa, las ondas pueden denominarse en función del nombre de la magnitud física que se propaga.
    - Ondas de desplazamiento (ondas en una cuerda, ondas en la superficie del agua).
    - Ondas de presión (ondas sonoras).
    - Ondas térmicas.
    - Ondas electromagnéticas (luz, microondas, ondas de radio,...).

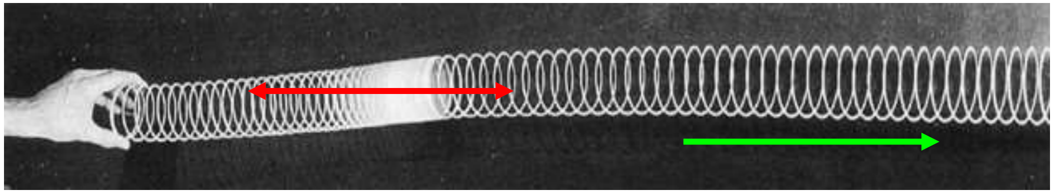
- Como la magnitud física asociada puede tener carácter escalar o vectorial podemos distinguir entre:
    - Ondas escalares (ondas en una cuerda).
    - Ondas vectoriales (ondas electromagnéticas).

2 – Tipos de ondas.

- En función de la relación entre los movimientos de las partículas del medio material respecto a la dirección de propagación de la onda, podemos distinguir entre:
  - Ondas transversales, si las oscilaciones de las partículas del medio son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda.
  - Ondas longitudinales, si las oscilaciones de las partículas del medio se produce en la misma dirección de propagación de la onda.



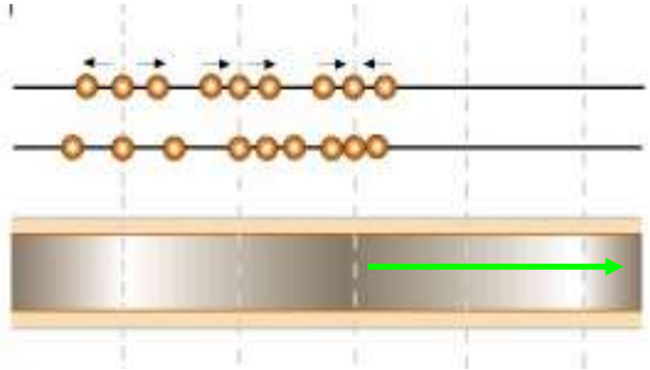
Onda transversal en un resorte



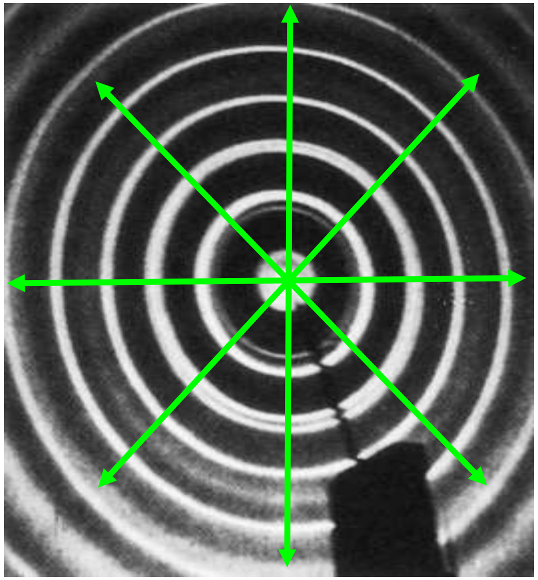
Onda longitudinal en un resorte

2 – Tipos de ondas.

- También se pueden clasificar las ondas atendiendo al número de dimensiones espaciales en que se propaga la energía, hablándose de:
  - Ondas unidimensionales (ondas en una cuerda o tubo sonoro).
  - Ondas bidimensionales (ondas superficiales en el agua).
  - Ondas tridimensionales (ondas sonoras o luminosas que emanan de una fuente de pequeñas dimensiones).



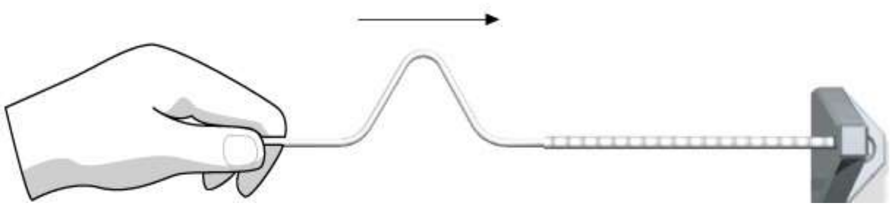
Onda en un tubo sonoro



Onda en la superficie de un líquido

2 – Tipos de ondas.

- Una onda puede consistir también en la propagación de
  - Un solo pulso (pulso de onda) que se caracteriza por tener un principio y un fin y por tanto una extensión limitada.
  - Las partículas del medio se mueven sólo durante el intervalo de tiempo que emplea el pulso en pasar por ella.
  - La forma del pulso puede variar conforme la onda se propaga ensanchándose (dispersión de la onda), aunque en muchos casos prácticos esta deformación es despreciable conservándose la forma del pulso.

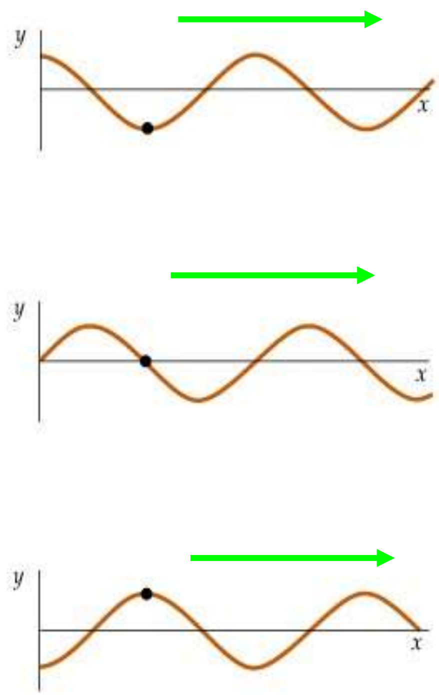


Pulso de onda en una cuerda

2 – Tipos de ondas.

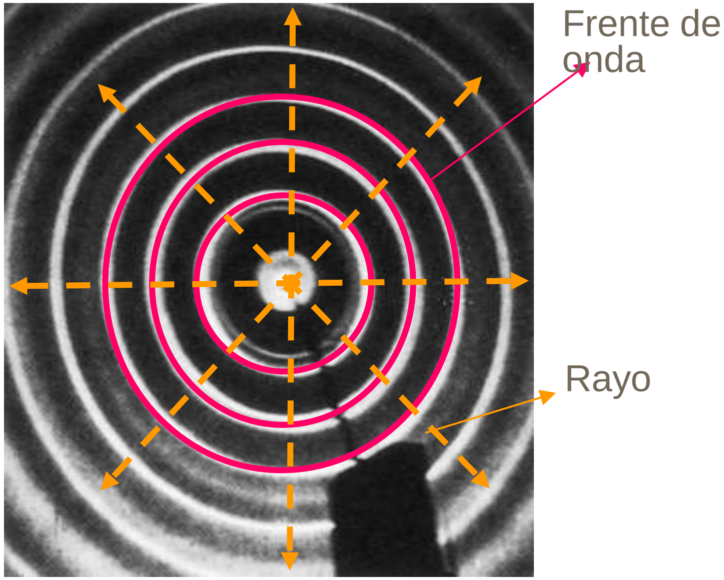
- Una sucesión de pulsos (tren de ondas) idénticos o no.
- Si las perturbaciones son periódicas se tendrá un tren de ondas periódicas, cuyo caso más simple e importante es el de las ondas armónicas en que cada partícula del medio se mueve con un MAS.
- Idealmente una onda periódica no tiene principio ni fin y por tanto una extensión ilimitada.
- A diferencia del pulso no se dispersa cuando se propaga.

Onda armónica en una cuerda

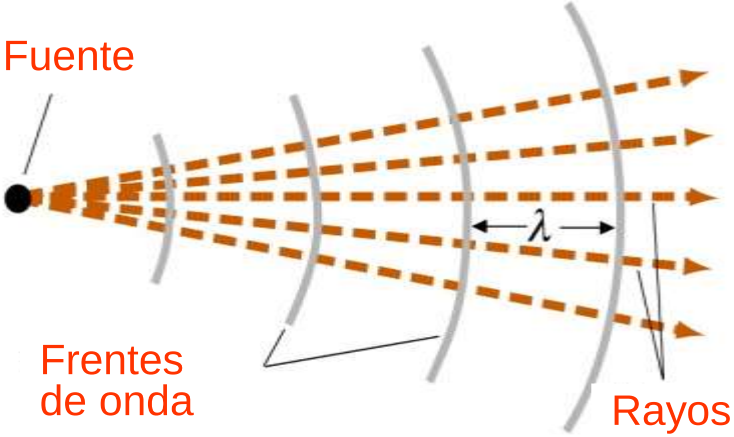


3 – Frente de onda.

- Se denomina superficie o frente de onda al lugar geométrico determinado por los puntos del medio que son alcanzados simultáneamente por la onda y que en consecuencia en cualquier instante dado están en el mismo estado o fase de la perturbación.



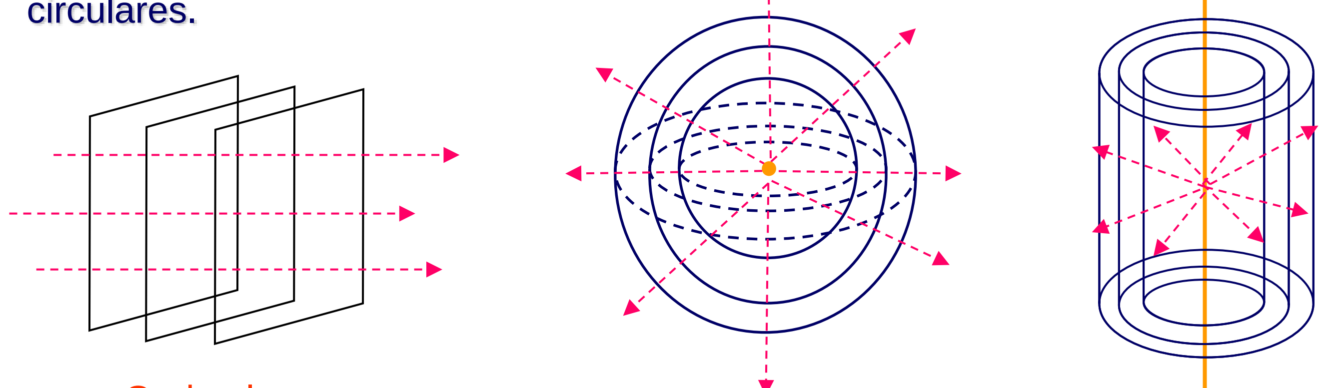
Onda en la superficie de un líquido



- La dirección de propagación de la perturbación es perpendicular al frente de onda. Una línea perpendicular a los frentes de onda, que indica la dirección y sentido de propagación de la perturbación, se denomina rayo.

3 – Frente de onda.

- Los frentes de onda pueden tener formas muy diversas:
  - Si las ondas se propagan en una sola dirección los frentes de onda serían planos paralelos y la perturbación se denomina como una onda plana.
  - Si el lugar donde se genera la onda es un foco puntual y la perturbación se propaga con la misma velocidad en todas las direcciones, la perturbación llegará simultáneamente a puntos equidistantes del foco, siendo los frentes de onda esferas, denominándose a la perturbación como onda esférica. La velocidad de la onda depende de las propiedades del medio en que se propaga, y si esta es igual en todas las direcciones al medio se le denomina isótropo (mismas propiedades en cualquier dirección).
  - Si la fuente de la onda está distribuida sobre un eje o línea recta, y el medio es isótropo, los frentes de onda serán superficies cilíndricas y a la perturbación se le denomina como una onda cilíndrica.
  - Las ondas circulares son ondas bidimensionales que se propagan sobre una superficie, en la que se produce una perturbación en un punto que da lugar a frentes de onda circulares.



Onda plana · Onda esférica · Onda cilíndrica

4 – Descripción del movimiento ondulatorio unidimensional.

- Sea una función (que podría representar a cualquier magnitud física)

$$\xi = f(x)$$

si se sustituye x por $x\text{-}x_0$ se obtiene la función

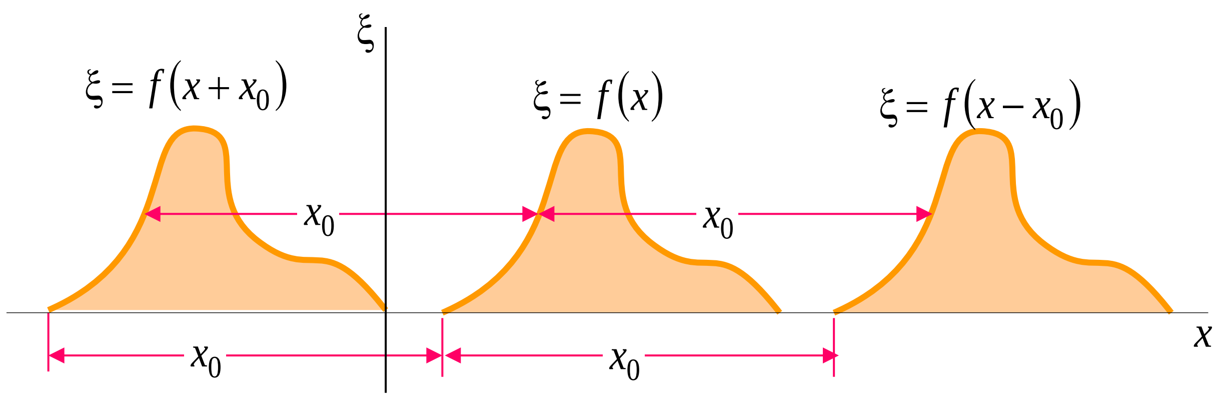
$$\xi = f(x - x_0)$$

que tendría la misma forma que la función original pero aparecería desplazada hacia la derecha una cantidad x_0

- De la misma forma la siguiente función

$$\xi = f(x + x_0)$$

corresponde a la función original desplazada hacia la izquierda una cantidad x_0



4 – Descripción del movimiento ondulatorio unidimensional.

- Ahora bien si se tiene que x_0 varía con el tiempo y es igual a

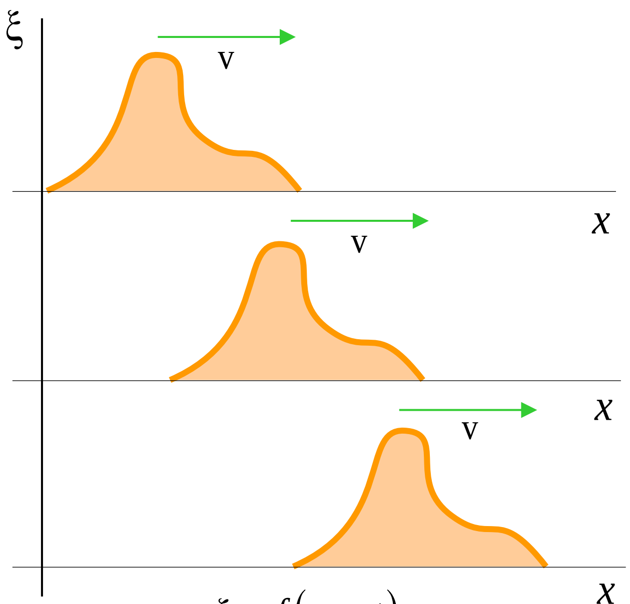
$$x_0 = \mathrm{v}t \quad \xrightarrow[\text{se obtiene}]{} \quad \xi = f(x - \mathrm{v}t)$$

que representa a una curva viajera que se mueve hacia la derecha con velocidad v, que se llama velocidad de fase.

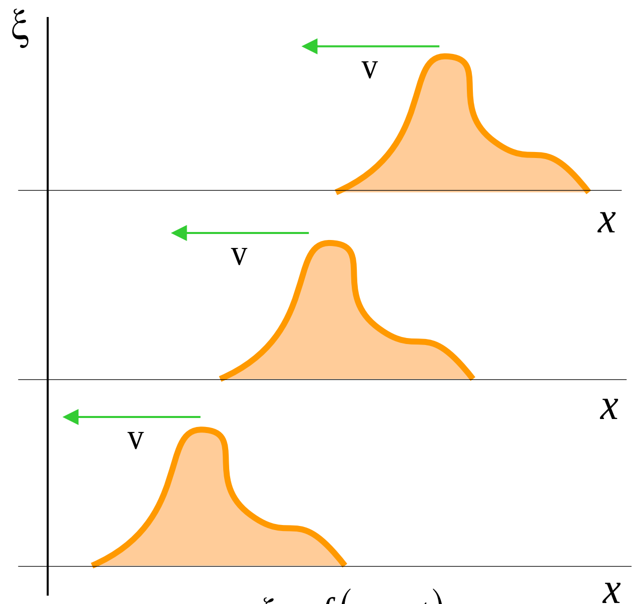
- Del mismo modo

$$\xi = f(x + \mathrm{v}t)$$

representa a una curva viajera que se mueve hacia la izquierda con velocidad v.



$\xi = f(x - \mathrm{v}t)$



$\xi = f(x + \mathrm{v}t)$

4 – Descripción del movimiento ondulatorio unidimensional.

- Por tanto una expresión matemática de la forma

$$\boxed{\xi(x,t) = f(x \pm \mathrm{v}t)}$$

resulta adecuada para describir una magnitud física (deformación de una cuerda, presión de un gas, campo eléctrico o magnético,...) que viaja o se propaga sin sufrir deformación a lo largo del eje x, esto es a una <u>onda unidimensional</u>.

- Un caso particular especialmente interesante es el de una onda armónica o senoidal que tiene por expresión

$$\boxed{\xi(x,t) = \xi_0 \mathrm{sen}\, k(x - \mathrm{v}t)} \Rightarrow$$

ξ_0 Amplitud de onda

$k(x-\mathrm{v}t)$ Fase de onda

v Velocidad de onda

k número de onda

- Sustituyendo en la onda armónica el valor de x por x+2π/k

$$\xi\left(x+\frac{2\pi}{k},t\right) = \xi_0 \mathrm{sen}\, k\left(x+\frac{2\pi}{k}-\mathrm{v}t\right) = \xi_0 \mathrm{sen}\left[k(x-\mathrm{v}t)+2\pi\right] = \xi_0 \mathrm{sen}\, k(x-\mathrm{v}t) = \xi(x,t)$$

se vuelve a obtener el mismo valor de la onda armónica.

- Entonces la magnitud

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$$

es el periodo espacial que también se denomina como <u>longitud de onda</u>.

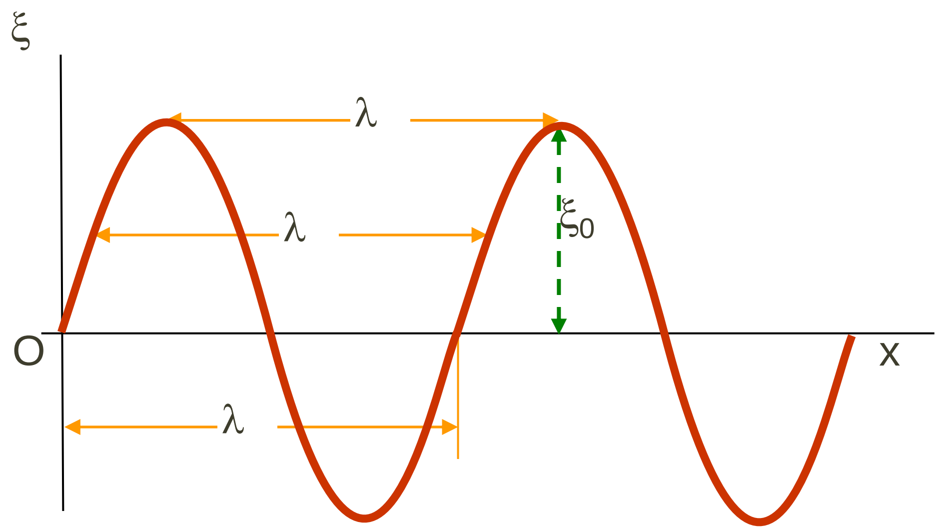
4 – Descripción del movimiento ondulatorio unidimensional.

- Entonces el número de onda está relacionado con la longitud de onda a través de

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

y la onda armónica puede expresarse como

$$\boxed{\xi(x,t) = \xi_0 \mathrm{sen}\, k(x - \mathrm{v}t) = \xi_0 \mathrm{sen}\, \frac{2\pi}{\lambda}(x - \mathrm{v}t)}$$



4 – Descripción del movimiento ondulatorio unidimensional.

- La ecuación de la onda armónica también puede escribirse como

$$\xi(x,t)=\xi_0 \operatorname{sen}(kx-\omega t)$$

donde

$$\omega = k\text{v} = \frac{2\pi \text{v}}{\lambda}$$ Frecuencia angular

- Como además hemos visto que

$$\omega = \frac{2\pi}{P} = 2\pi\nu \Longrightarrow$$

P Periodo

ν Frecuencia

la onda armónica puede también expresarse como

$$\xi(x,t)=\xi_0 \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{P}\right)$$

- El periodo y la longitud de onda están relacionados a través de

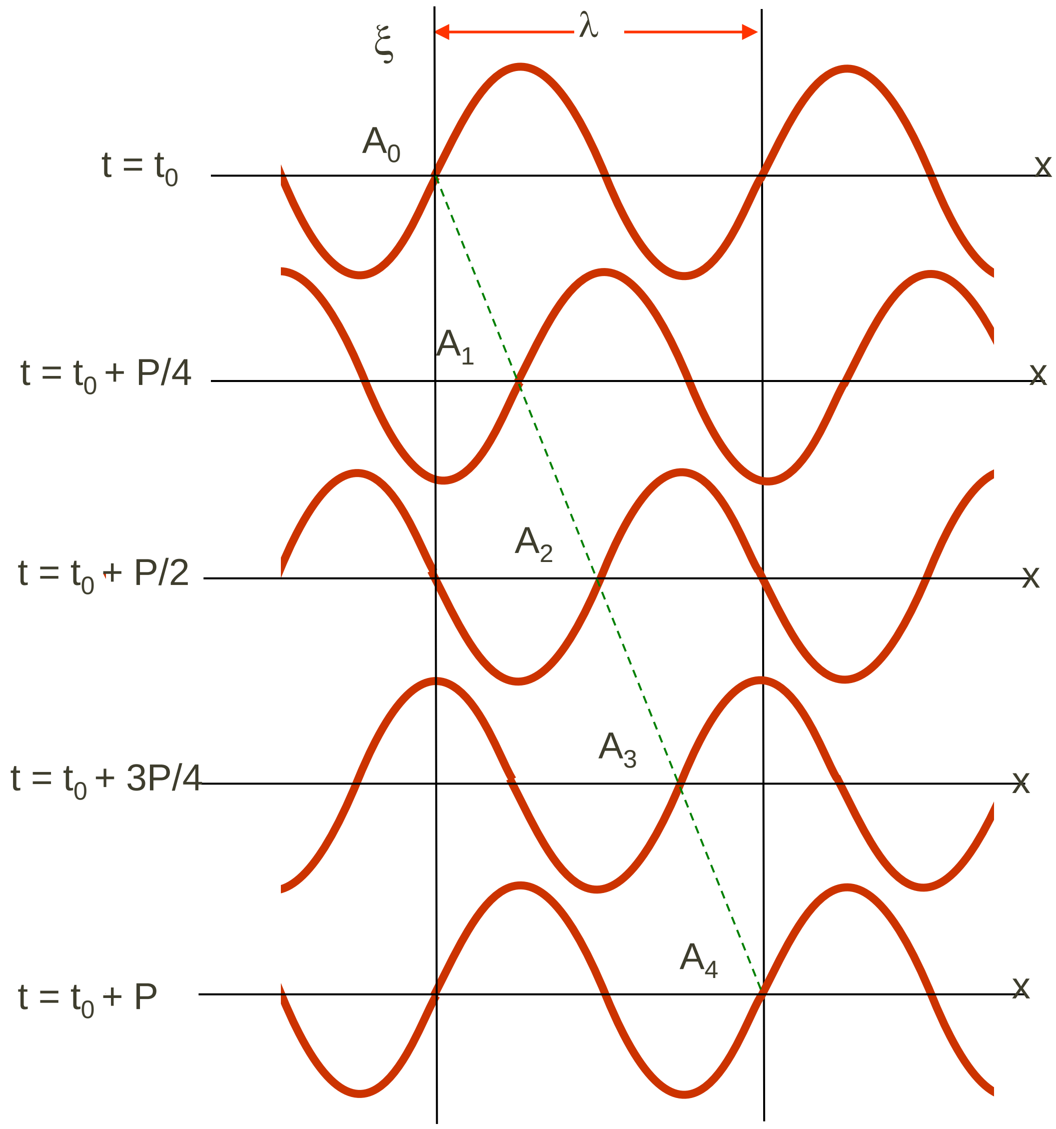
$$\text{v} = \frac{\lambda}{P} \Longrightarrow \lambda = \text{v}P$$

La longitud de onda es la distancia que recorre la onda en un periodo

- En resumen, una onda armónica puede expresarse de las siguientes formas

$$\xi(x,t)=\xi_0 \operatorname{sen} k(x\pm \text{v}t)=\xi_0 \operatorname{sen}(kx\pm\omega t)=\xi_0 \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}\pm\frac{t}{P}\right)$$

4 – Descripción del movimiento ondulatorio unidimensional.



5 – Ecuación general del movimiento ondulatorio unidimensional

- La ecuación general que describe el movimiento ondulatorio que se propaga con una velocidad definida v y sin distorsión a lo largo del eje +X o –X es

$$\boxed{\frac{d^2\xi}{dt^2} = \mathrm{v}^2 \frac{d^2\xi}{dx^2}}$$

Ecuación básica de una onda

- La solución de esta ecuación es

$$\boxed{\xi(x,t) = f(x-\mathrm{v}t)} \qquad \boxed{\xi(x,t) = f(x+\mathrm{v}t)} \qquad \boxed{\xi(x,t) = f_1(x-\mathrm{v}t) + f_2(x-\mathrm{v}t)}$$

- Es fácil demostrar que una onda armónica del siguiente tipo

$$\xi(x,t) = \xi_0 \operatorname{sen} k(x-\mathrm{v}t)$$

satisface la ecuación de onda.

Derivando respecto a x y a t se obtiene

$$\frac{d\xi}{dx} = k\xi_0 \cos k(x-\mathrm{v}t) \qquad \frac{d^2\xi}{dx^2} = -k^2\xi_0 \operatorname{sen} k(x-\mathrm{v}t)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -k\mathrm{v}\xi_0 \cos k(x-\mathrm{v}t) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -k^2\mathrm{v}^2\xi_0 \operatorname{sen} k(x-\mathrm{v}t)$$

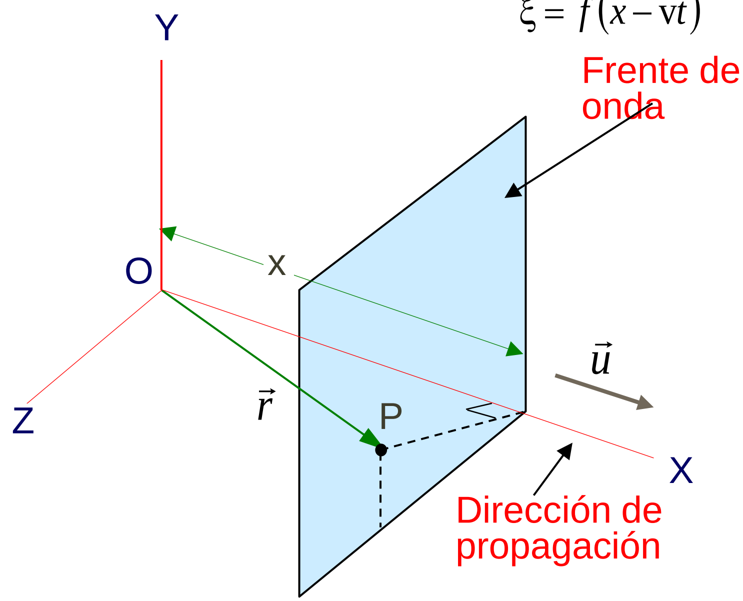
que cumple

$$\boxed{\frac{d^2\xi}{dt^2} = \mathrm{v}^2 \frac{d^2\xi}{dx^2}}$$

7 – Descripción del movimiento ondulatorio en una dirección arbitraria.

- Hemos visto que la expresión para representar a un movimiento ondulatorio que se propaga según el eje x (onda plana o unidimensional) es

$$\xi = f\left(x - \mathrm{v}t\right)$$



$\vec{r}$ ⇨ Vector de posición de un punto cualquiera del frente de onda

$\vec{u}$ ⇨ Vector unitario en la dirección de propagación

- De la figura, se observa que

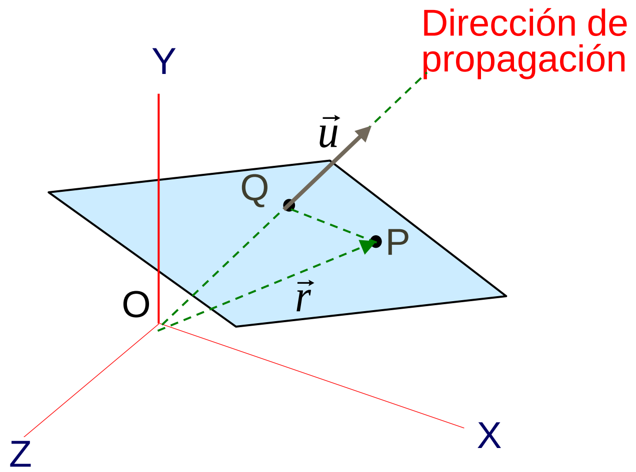
$$x = \vec{r} \cdot \vec{u}$$

resulta que la onda unidimensional anterior puede expresarse como

$$\xi = f\left(\vec{u} \cdot \vec{r} - \mathrm{v}t\right)$$

7 – Descripción del movimiento ondulatorio en una dirección arbitraria.

- Esta última expresión es bastante útil porque representa a una onda unidimensional que se propaga en una dirección arbitraria (no solo a lo largo del eje X)



- En el caso de una onda plana armónica o senoidal que se propaga en una dirección arbitraria, escribimos

$$\boxed{\xi(x,t) = \xi_0 \operatorname{sen} k(\vec{u}\cdot\vec{r} - vt) = \xi_0 \operatorname{sen}(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

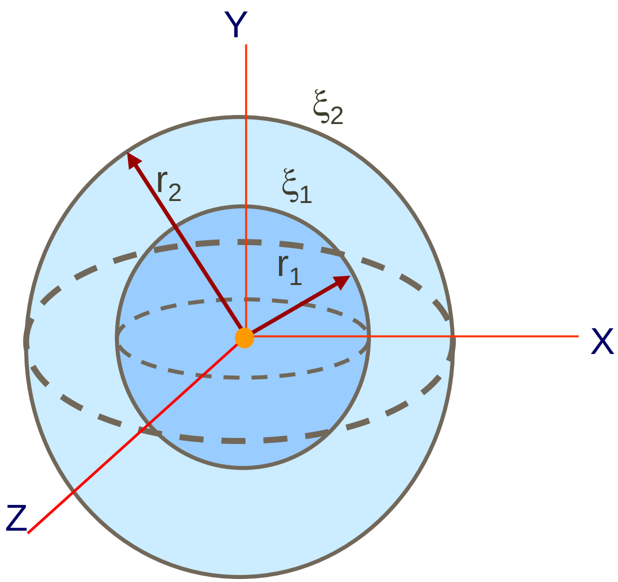
donde $\vec{k} = k\vec{u}$ es el vector de propagación o vector número de onda

- Para una onda plana que se propaga en una dirección arbitraria, la ecuación de onda se convierte en

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right)}$$

7 – Descripción del movimiento ondulatorio en una dirección arbitraria.

- Un tipo de ondas importantes que se propagan en todas las direcciones del espacio son las ondas esféricas.
- En estas la perturbación de la magnitud física que se propaga será una función de la distancia a la que se encuentra del foco donde se generó la onda, r, y el tiempo, t.



$$\boxed{\xi = \xi(r,t)}$$

- La ecuación básica de una onda esférica es

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathrm{v}^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)}$$

- La solución de esta ecuación es de la forma

$$\boxed{\xi(r,t) = \frac{1}{r} f(r \pm \mathrm{v}t)}$$

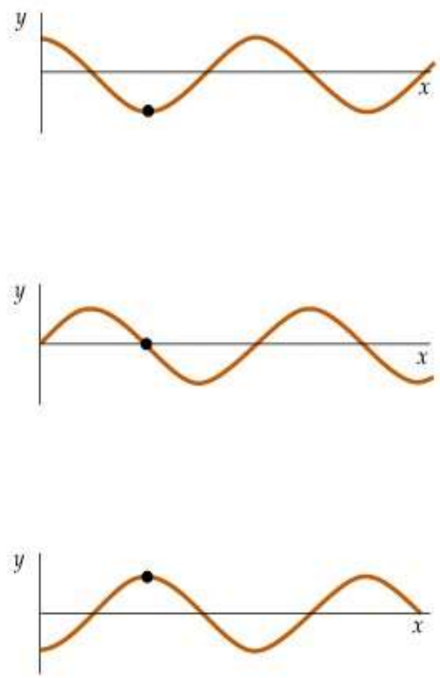
donde el signo menos se utiliza cuando la onda se aleja del foco puntual.

- De este modo, la expresión de una onda armónica esférica es

$$\boxed{\xi(x,t) = \frac{\xi_0}{r}\,\mathrm{sen}\,k(r - \mathrm{v}t) = \frac{\xi_0}{r}\,\mathrm{sen}(kr - \omega t)}$$

8 – Energía transportada por una onda. Intensidad.

- Se ha indicado en la introducción que una característica importante del movimiento ondulatorio es que transporta energía (pero no materia). En este apartado se tratará de caracterizar este transporte de energía.
- Supóngase el caso de una onda armónica que se propaga por una cuerda. Cada trozo de cuerda de masa Δm por la que pasa la onda oscila con un MAS,
- Su energía será por tanto



Onda armónica en una cuerda

$$\boxed{\Delta E = \frac{1}{2}\Delta m\omega^2\xi_0^2 = \frac{1}{2}\mu\Delta x\omega^2\xi_0^2}$$

donde $\Delta m = \mu\Delta x$

$\mu \Rightarrow$ Densidad lineal (masa/longitud)

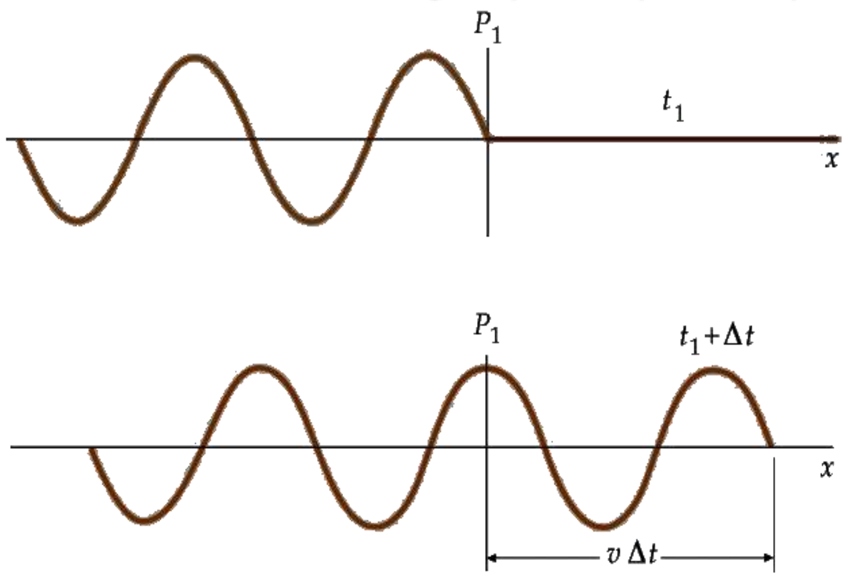
$\Delta x \Rightarrow$ Longitud de un trozo de cuerda

- Se define la densidad de energía ρ_E como la energía por unidad de volumen,

- Cuerda $\rho_E = \frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2$ donde $\mu \Rightarrow$ Densidad lineal
- Superficie de líquido $\rho_E = \frac{\Delta E}{\Delta S} = \frac{1}{2}\sigma\omega^2\xi_0^2$ donde $\sigma \Rightarrow$ Densidad superficial
- Onda sonora $\rho_E = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$ donde $\rho \Rightarrow$ Densidad volumétrica

8 – Energía transportada por una onda. Intensidad.

- Supóngase la onda armónica que se propaga por la cuerda y que en el instante t_1 ha alcanzado el punto P_1.
- Durante un intervalo de tiempo Δt la onda recorre una distancia $\Delta x = v\Delta t$.
- De esta forma la energía que ha pasado por P_1 durante el intervalo de tiempo Δt es



$$\Delta E = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2\Delta x = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2 v\Delta t$$

- De este modo, se define la potencia P como la energía transmitida en la unidad de tiempo

$$\boxed{P = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2 v}$$

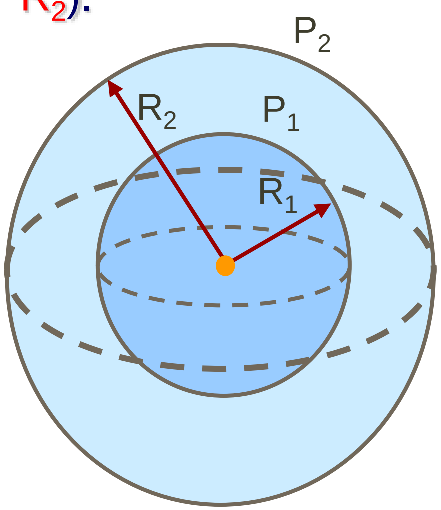
La energía y la potencia transmitidas son proporcionales al cuadrado de la amplitud de la onda

8 – Energía transportada por una onda. Intensidad.

- La intensidad , I, es la energía que atraviesa en la unidad de tiempo un área unidad, colocada perpendicularmente a la dirección de propagación de la onda.
- Por tanto $\boxed{P = IA}$ donde A es el área
- Al igual que la potencia, la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud.

➢ Ondas esféricas

- Sea una onda esférica que se propaga en un medio sin disipación de energía y tomamos dos superficies esféricas situadas a una distancia R_1 y R_2 del foco ($R_1 < R_2$).



- La potencia transmitida a través de cada superficie es

$$P_1 = I_1 A_1 = I_1 4\pi R_1^2 \qquad P_2 = I_2 A_2 = I_2 4\pi R_2^2$$

- Como la energía se conserva en este caso

$$P_1 = P_2 \Longrightarrow I_1 4\pi R_1^2 = I_2 4\pi R_2^2 \Longrightarrow \boxed{I_1 R_1^2 = I_2 R_2^2} \Longrightarrow \boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2}}$$

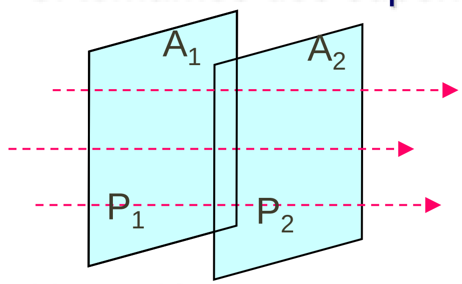
- Y ya que $R_1 < R_2$ entonces se tiene que $I_1 > I_2$
- Ya que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud

$$\frac{\xi_{01}^2}{\xi_{02}^2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \Longrightarrow \boxed{\frac{\xi_{01}}{\xi_{02}} = \frac{R_2}{R_1}} \Longrightarrow \boxed{\xi_{01} R_1 = \xi_{02} R_2}$$

8 – Energía transportada por una onda. Intensidad.

➢ Ondas planas

- Sea una onda plana que se propaga en un medio en el que no hay disipación de energía.
- Si tomamos dos superficies planas se verifica que



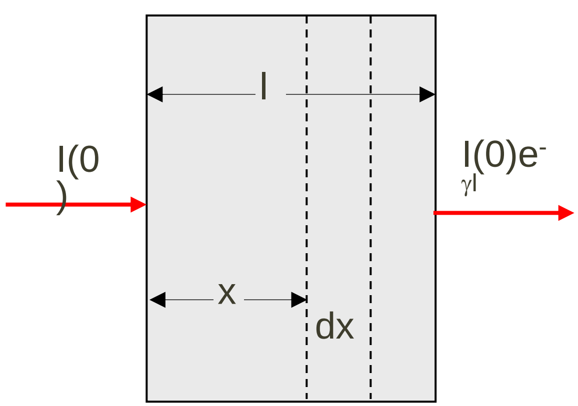
$$\boxed{P_1 = P_2} \qquad \boxed{A_1 = A_2}$$

- Con lo cual se tiene que

$$P_1 = I_1 A_1 \quad , \quad P_2 = I_2 A_2 \Longrightarrow \boxed{I_1 = I_2} \Longrightarrow \boxed{\xi_{01} = \xi_{02}}$$

➢ Absorción

- Fenómeno por el que la intensidad de una onda disminuye porque parte de su energía se disipa en el medio en el que se propaga.
- Para una onda plana que se propaga según el eje x, se verifica la siguiente relación



$$\boxed{\frac{dI}{I} = -\gamma dx}$$

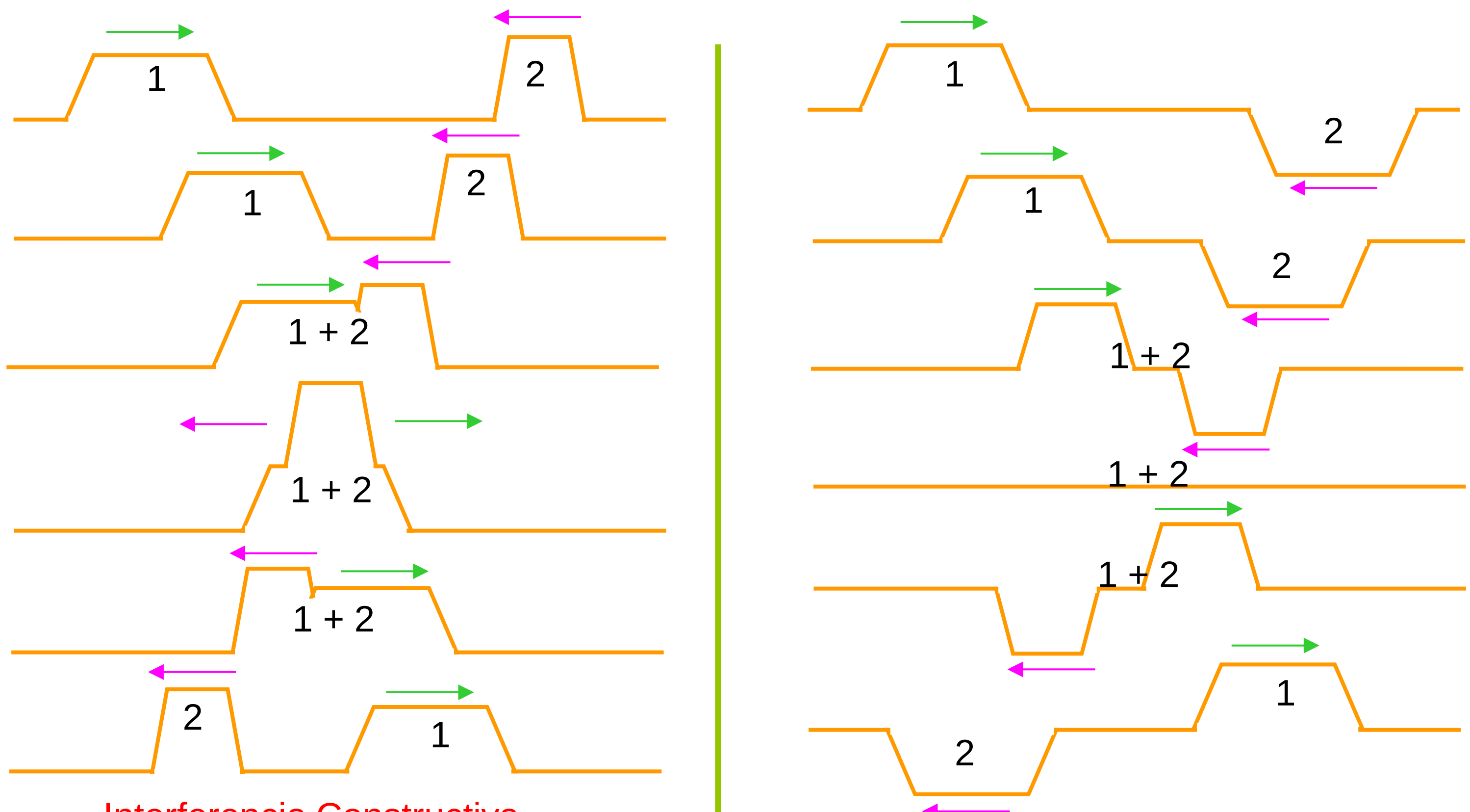
- A partir de la cual se obtiene que

$$\boxed{\begin{array}{l} I(x) = I(0) e^{-\gamma x} \\ \xi_0(x) = \xi_0(0) e^{-\frac{\gamma}{2}x} \end{array}}$$

9 – Superposición o interferencia de ondas

- Cuando dos o más ondas coinciden en el tiempo y en el espacio, la función de onda resultante es la suma vectorial de las funciones de onda individuales (Principio de superposición de ondas).

$$\xi_1(x,t) = f_1(x - vt) \quad \xi_2(x,t) = f_2(x + vt) \quad \Longrightarrow \quad \xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

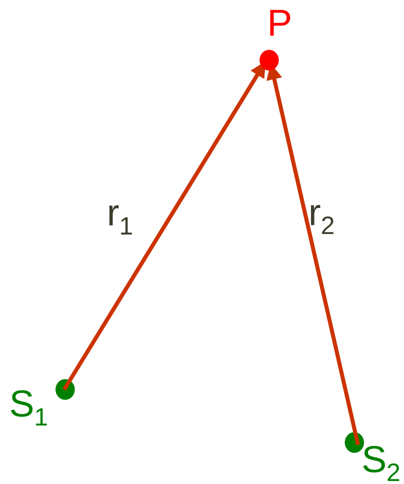


Interferencia Constructiva

Interferencia Destructiva

9 – Superposición o interferencia de ondas

➢ Interferencias de ondas de igual frecuencia.



- Supongamos dos fuentes de ondas armónicas S_1 y S_2 que emiten ondas en fase ($\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$), con idéntica frecuencia y número de onda y de amplitudes ξ_{01} y ξ_{02}.
- Las expresiones de las dos ondas en un punto P que dista r_1 y r_2 de las fuentes respectivas es

$$\xi_1 = \xi_{01}\,\mathrm{sen}\left(\omega t - kr_1\right) \qquad \xi_2 = \xi_{02}\,\mathrm{sen}\left(\omega t - kr_{2.}\right)$$

- La superposición de ambas ondas en P es

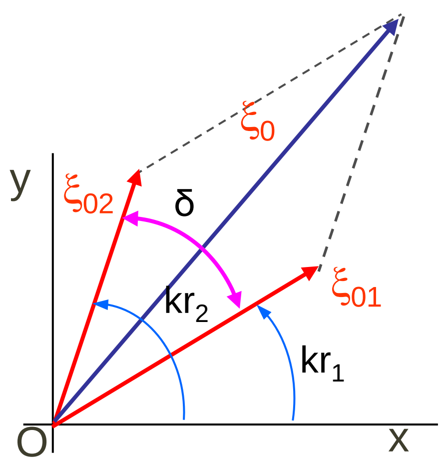
$$\xi = \xi_1 + \xi_1 = \xi_{01}\,\mathrm{sen}\left(\omega t - kr_1\right) + \xi_{02}\,\mathrm{sen}\left(\omega t - kr_2\right)$$

- Esto corresponde a la superposición de dos MAS de la misma frecuencia y con una diferencia de fase igual a

$$\delta = \left(\omega t - kr_1\right) - \left(\omega t - kr_2\right) = kr_2 - kr_1 = k\left(r_2 - r_1\right)$$

con lo que la amplitud del movimiento resultante en P es

$$\xi_0 = \sqrt{\xi_{01} + \xi_{02} + 2\xi_{01}\xi_{02}\cos k\left(r_2 - r_1\right)}$$



9 – Superposición o interferencia de ondas

- La amplitud es máxima e igual a $\xi_0 = \xi_{01} + \xi_{02}$ cuando

$$\cos k(r_2 - r_1) = 1$$

Interferencia Constructiva

donde n = 0, ±1, ±2, ±3,...

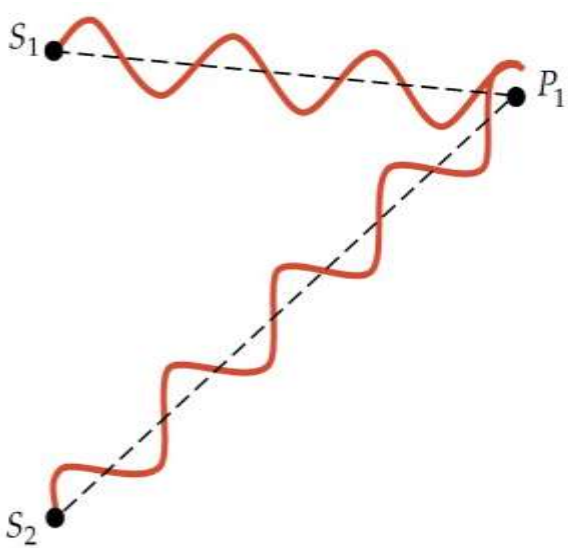
- La amplitud es mínima e igual a $\xi_0 = \xi_{01} - \xi_{02}$ cuando

$$\cos k(r_2 - r_1) = -1$$

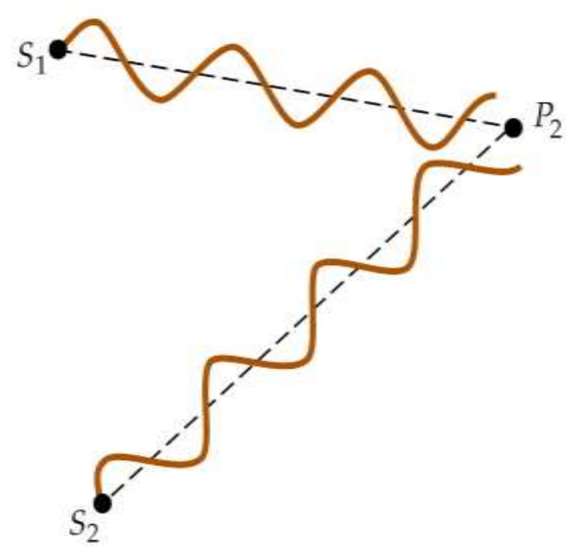
Interferencia Destructiva

donde n = 0, ±1, ±2, ±3,...

Interferencia Constructiva

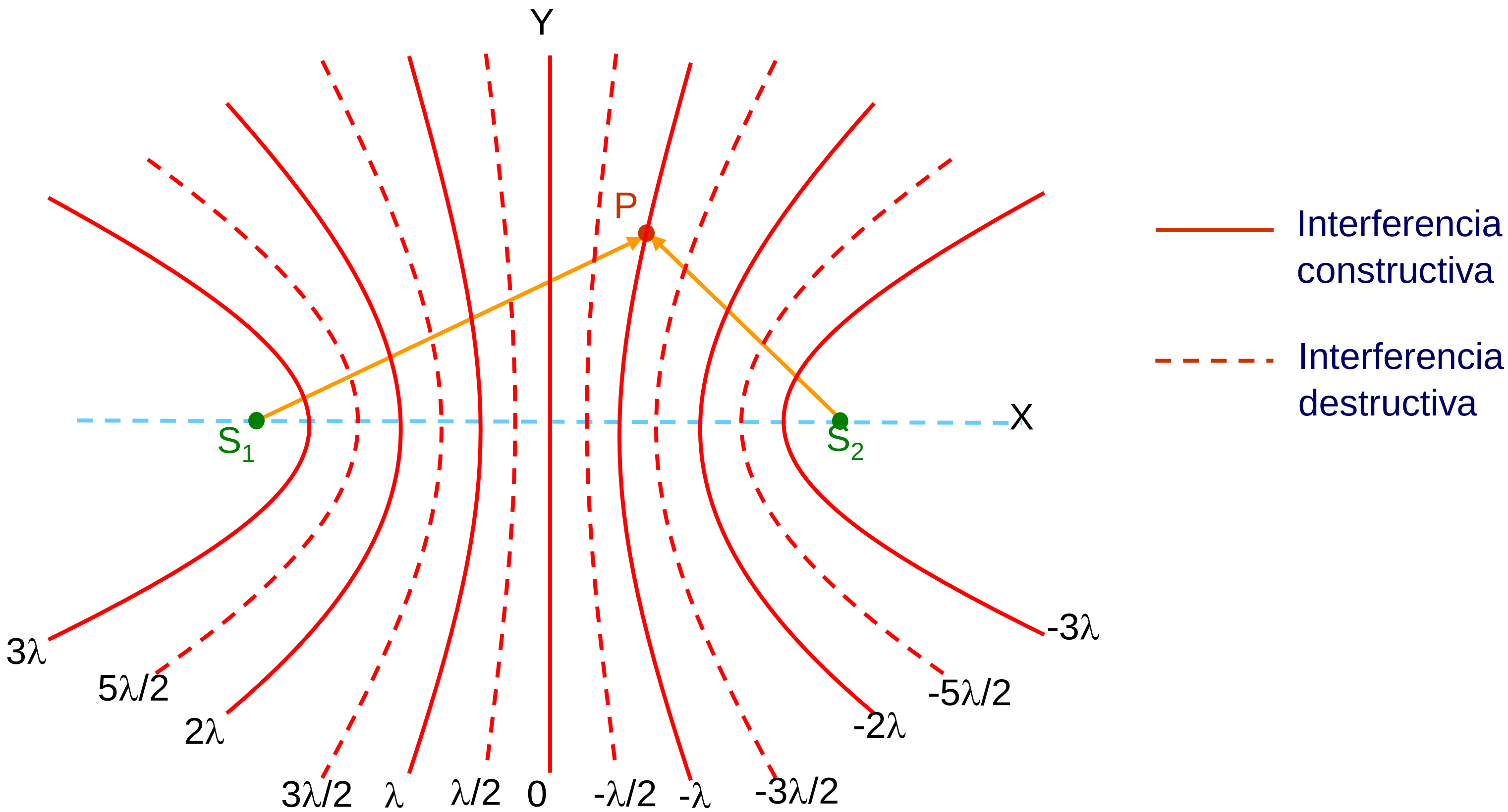


Interferencia Destructiva



9 – Superposición o interferencia de ondas

- Como se observa, el valor de la amplitud del movimiento resultante (o el tipo de interferencia) depende de la diferencia $r_2 - r_1$.
- Además, ya que la ecuación $r_2 - r_1 = cte$ corresponde a una hipérbole, se tiene que los lugares donde se producen las interferencias son superficies hiperbólicas tal que



9 – Superposición o interferencia de ondas

➢ Ondas estacionarias.

- Las ondas estacionarias se producen a través de la interferencia de dos ondas idénticas (igual amplitud, frecuencia y número de onda) que se propagan en sentido contrario.
- Supongamos que tenemos dos de estas ondas propagándose en el eje X y que tienen por expresión,

$$\xi_1 = \xi_0 \operatorname{sen}(\omega t + kx) \qquad \xi_2 = \xi_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

- La superposición de ambas ondas viene dada por

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi_0 \operatorname{sen}(\omega t + kx) + \xi_0 \operatorname{sen}(\omega t - kx) = \xi_0 \left[\operatorname{sen}(\omega t + kx) + \operatorname{sen}(\omega t - kx)\right]$$

Y teniendo en cuenta la siguiente propiedad trigonométrica que establece

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\cos\frac{A-B}{2}\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}$$

se obtiene que

$$\boxed{\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2\xi_0 \cos kx \operatorname{sen}\omega t}$$

Onda Estacionaria

Y como se observa la onda estacionaria no es una función dependiente de x±vt que es la característica de las ondas viajeras.

Esta expresión indica que cualquier partícula del medio situada en un punto dado x oscila con un MAS de amplitud

$$\boxed{\xi_{0r} = 2\xi_0 \cos kx}$$

9 – Superposición o interferencia de ondas

- La amplitud de la onda estacionaria es por tanto una función de la distancia x.
- Adquiere su valor máximo que es igual a,

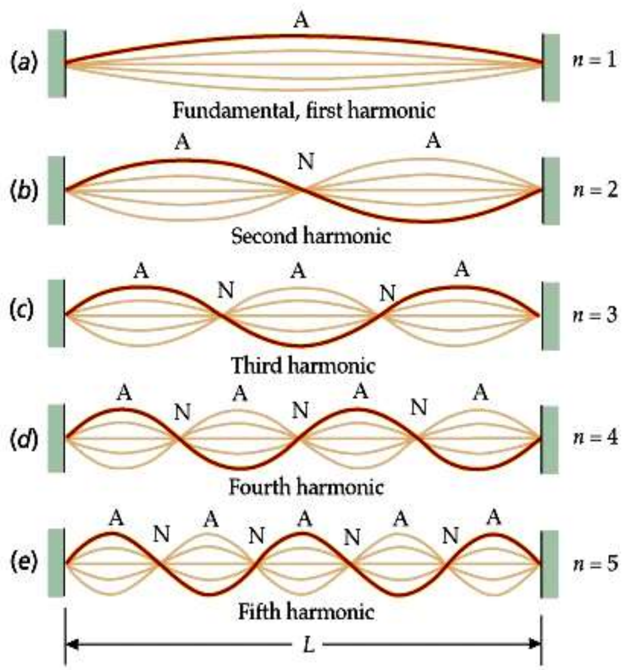
$$\xi_{0r} = 2\xi_0 \quad \text{cuando} \quad \cos kx = \pm 1$$

Vientres o antinodos

- Adquiere su valor mínimo que es igual a,

$$\xi_{0r} = 0 \quad \text{cuando} \quad \cos kx = 0$$

Nodos



- La distancia entre dos vientres consecutivos (d_{AA}) o entre dos nodos consecutivos (d_{NN}) es

$$d_{AA} = d_{NN} = \lambda/2$$

y la distancia entre un vientre y un nodo consecutivo (d_{AN}) es

$$d_{AN} = \lambda/4$$

A Antinodos
N Nodos

9 – Superposición o interferencia de ondas

➢ Superposición de ondas de distinta frecuencia. Pulsaciones. Velocidad de grupo.

- Supongamos dos ondas armónicas de igual amplitud que se propagan a lo largo del eje X, y que tienen frecuencias angulares ω_1 y ω_2 y números de onda k_1 y k_2 próximos

$$\xi_1 = \xi_0 \operatorname{sen}(\omega_1 t - k_1 x) \qquad \xi_2 = \xi_0 \operatorname{sen}(\omega_2 t - k_2 x)$$

- La superposición de ambas ondas viene dada por

$$\xi = \xi_2 + \xi_1 = \xi_0 \operatorname{sen}(\omega_2 t - k_2 x) + \xi_0 \operatorname{sen}(\omega_1 t - k_1 x)$$

Y teniendo en cuenta la propiedad trigonométrica

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\cos\frac{A-B}{2}\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}$$

se obtiene que

$$\boxed{\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2\xi_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta k x)\operatorname{sen}(\omega t - kx)}$$

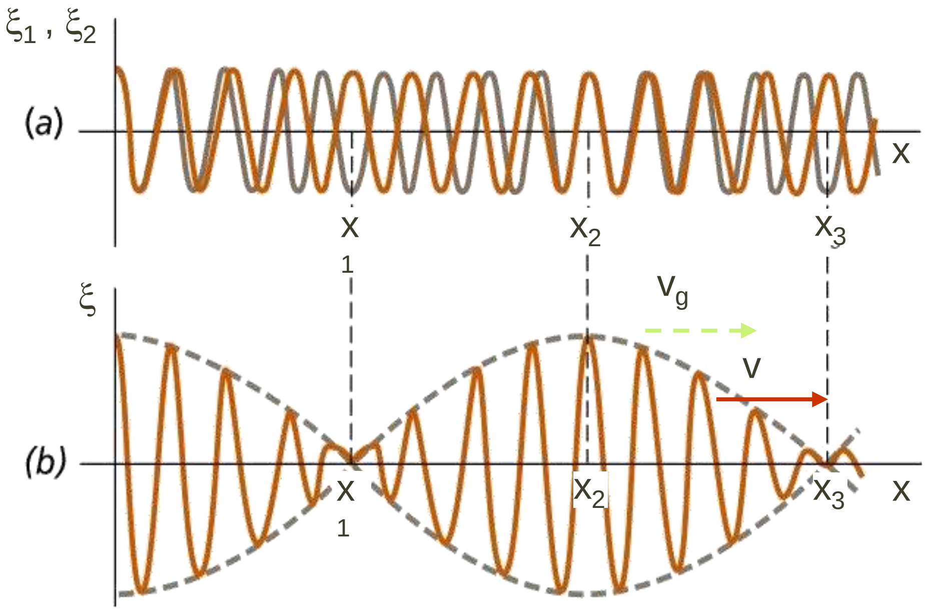
donde

$$\begin{cases} 2\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad , \quad 2\Delta k = k_2 - k_1 \\ \omega_m = (\omega_1 + \omega_2)/2 \approx \omega \quad , \quad k_m = (k_1 + k_2)/2 \approx k \end{cases}$$

- La amplitud de la onda resultante no es constante y viene dada por la expresión

$$2\xi_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta k x)$$

9 – Superposición o interferencia de ondas



- La onda resultante está formada por grupos o paquetes de ondas individuales separados por puntos de amplitud nula.
- La envolvente de la amplitud se desplaza a lo largo del eje X con una velocidad llamada velocidad de grupo v_g, que viene dada por

$$\boxed{v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}}$$

- En el límite $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ y $\Delta k \rightarrow dk$ la velocidad de grupo viene expresada como

$$v_g = d\omega/dk$$

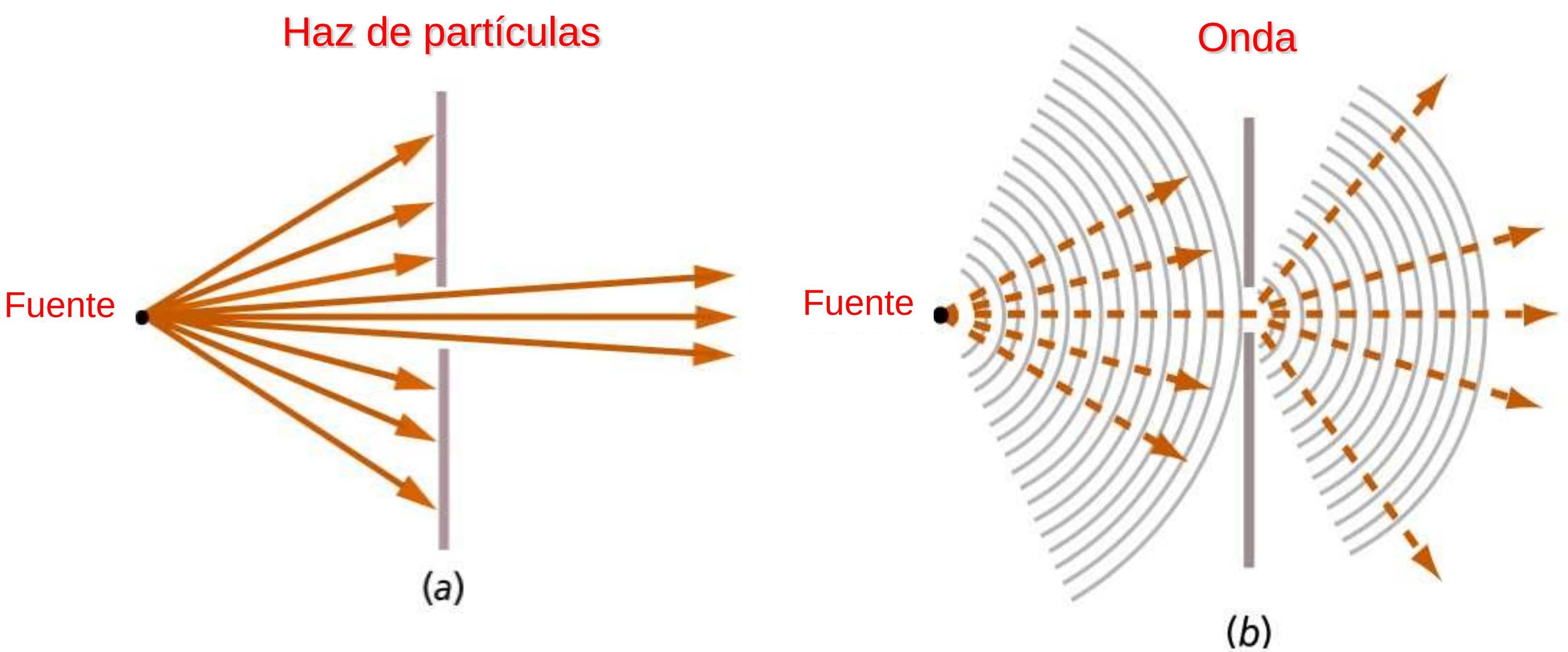
- La velocidad de grupo v_g y la velocidad de fase v ($v = \omega/k$) están relacionadas por

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv)}{dk} \Longrightarrow \boxed{v_g = v + k\frac{dv}{dk}}$$

- Si el medio es dispersivo $\Longrightarrow dv/dk \neq 0 \Longrightarrow \boxed{v_g \neq v}$
- Si el medio es no dispersivo $\Longrightarrow dv/dk = 0 \Longrightarrow \boxed{v_g = v}$

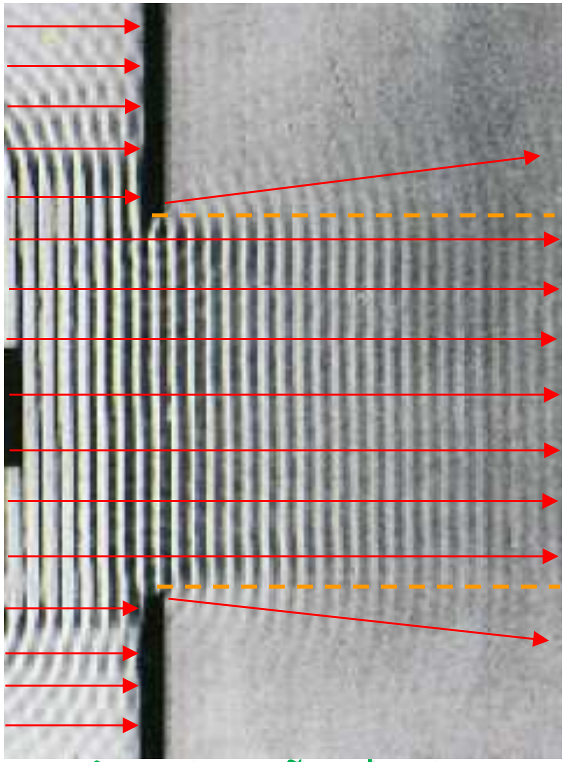
10 – Difracción de ondas

- Cuando un haz de partículas incide sobre una abertura con un obstáculo, estas partículas son detenidas por la barrera o pasan sin cambiar de dirección.
- Sin embargo cuando una onda encuentra un obstáculo tiende a rodearlo. Si una onda encuentra una barrera con una pequeña abertura se extiende alrededor del obstáculo en forma de onda esférica o circular. A este comportamiento se le denomina difracción.

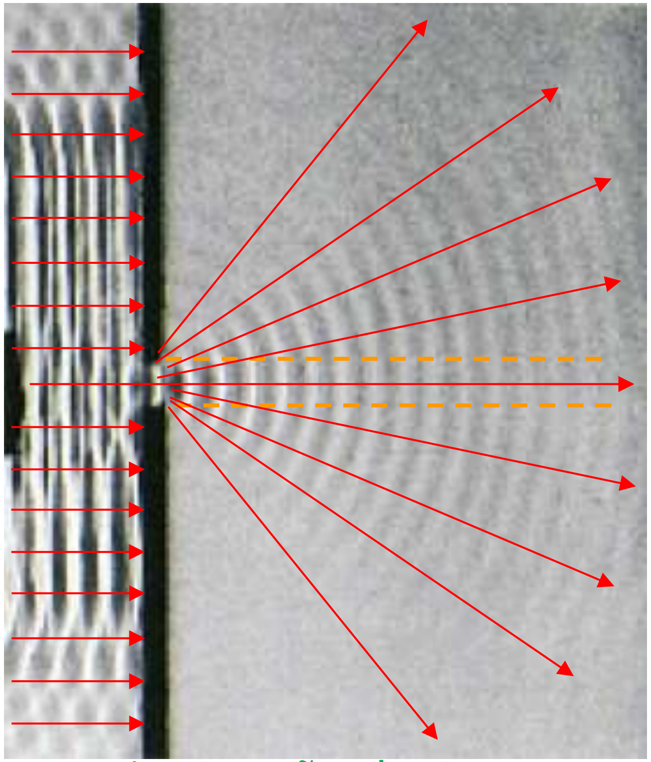


10 – Difracción de ondas

- La magnitud del fenómeno de la difracción depende de la relación entre la longitud de onda y el tamaño del obstáculo o abertura.
- Si la longitud de onda es pequeña en relación con la abertura entonces la difracción es pequeña.
- En cambio si la longitud de onda tiene las dimensiones de la abertura, los efectos de la difracción son grandes.



λ << tamaño abertura

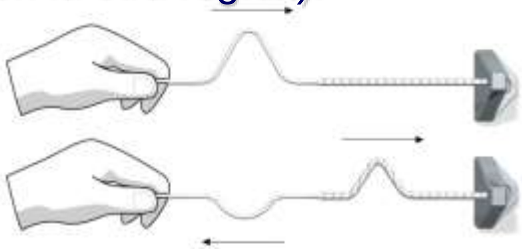


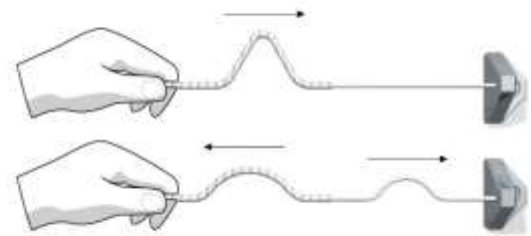
$\lambda \approx$ tamaño abertura

11 – Reflexión y refracción de ondas

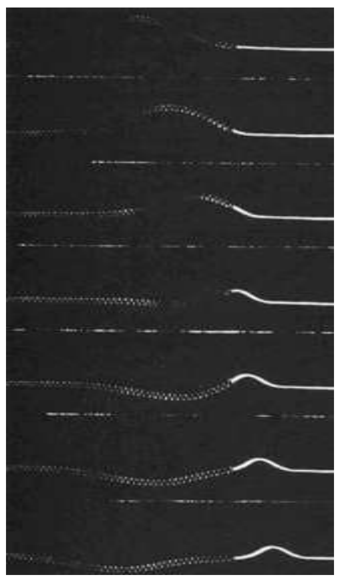
- Cuando una onda incide sobre una superficie límite o de separación de dos regiones en las que la velocidad de onda es diferente, parte de la onda se refleja (propagándose en la misma región que la incidente) y parte se transmite (propagándose en la otra región).

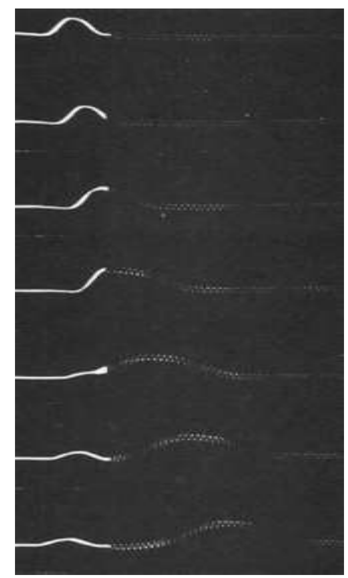
Ondas en una cuerda





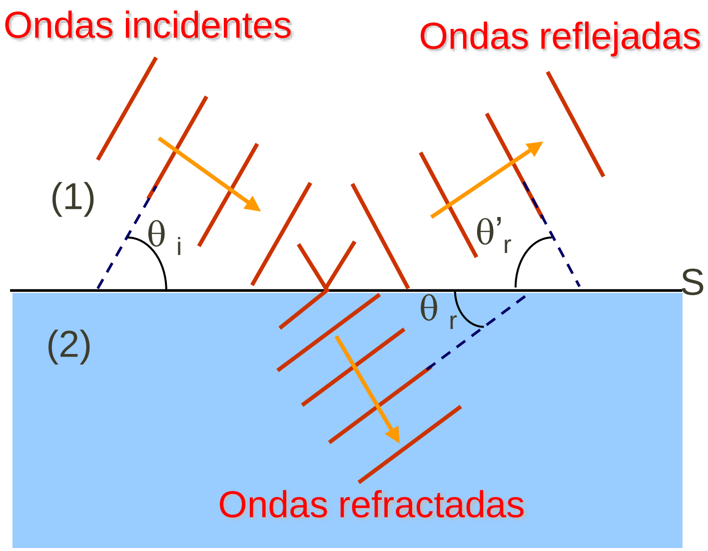
Ondas en un muelle

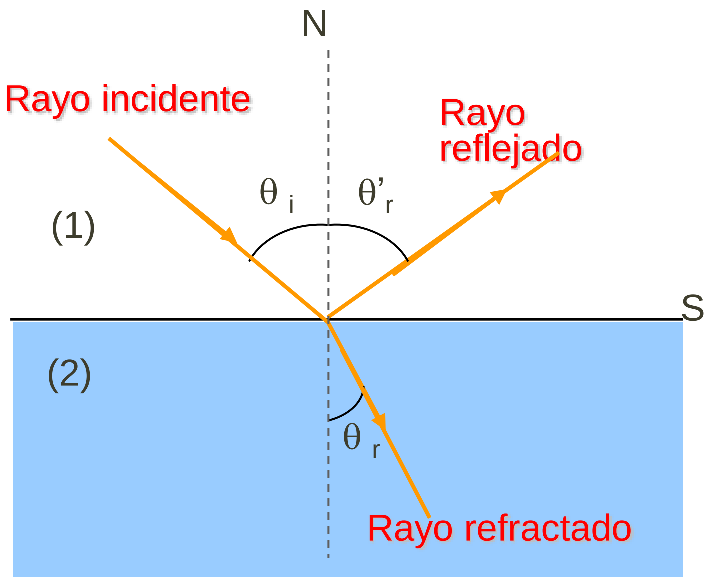




11 – Reflexión y refracción de ondas

- En tres dimensiones una frontera entre dos regiones de diferente velocidad de onda es una superficie.





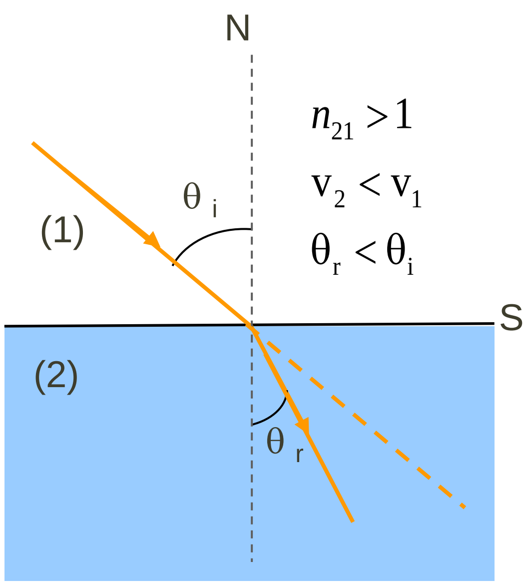
- Se verifican las siguientes leyes comprobadas experimentalmente:
  - Las direcciones de incidencia, refracción y reflexión se encuentran en un mismo plano perpendicular a la superficie de separación.
  - El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión

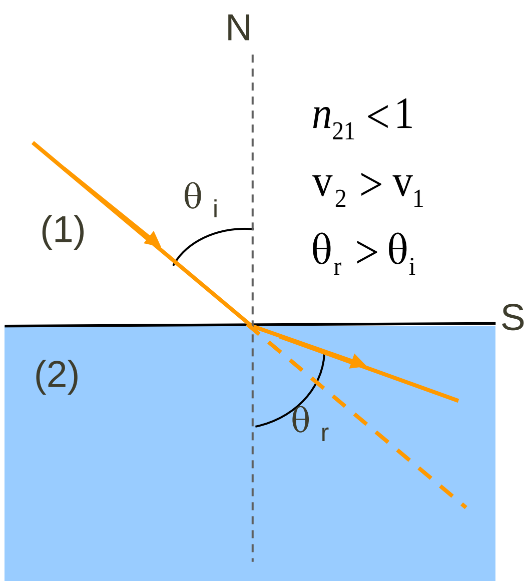
$$\theta_i = \theta'_r$$

11 – Reflexión y refracción de ondas

- La relación entre la dirección en que se propagan las ondas incidentes y las refractadas viene dada a través de la ley de Snell que establece que el cociente entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es constante e igual al índice de refracción del medio (2) respecto al medio (1), n_{21}

$$\frac{\mathrm{sen}\theta_i}{\mathrm{sen}\theta_r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}$$

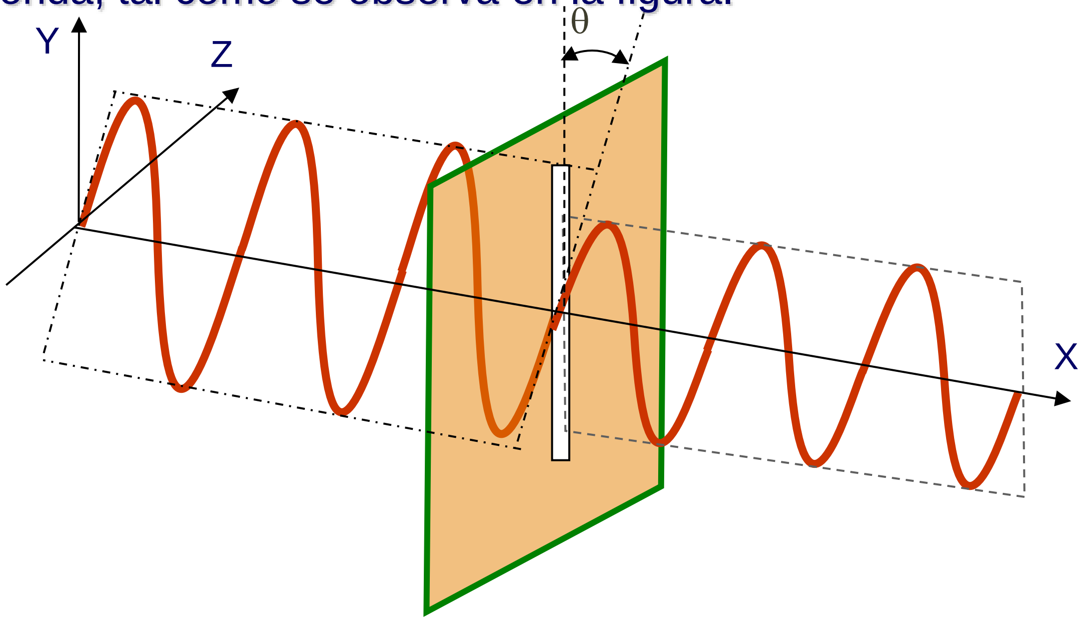




- Cuando n_{21}<1 hay un cierto ángulo de incidencia θ_i para el cual el ángulo de refracción θ_r es $\pi/2$. A este ángulo de incidencia se le llama ángulo crítico θ_c . Así si el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo crítico, solo habrá onda reflejada y no refractada.

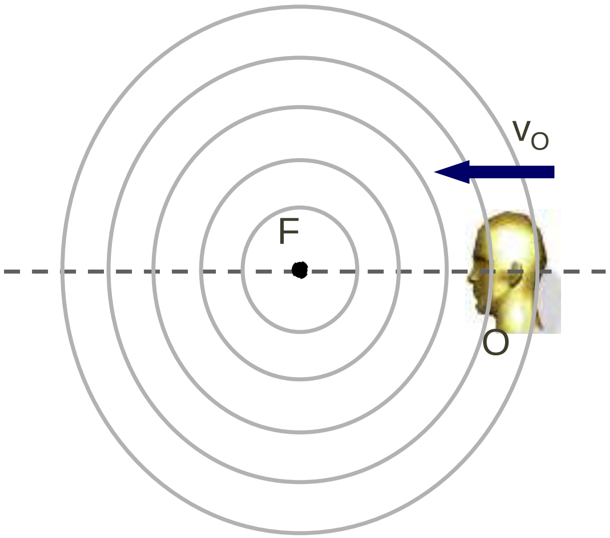
12 – Polarización de ondas.

- En las ondas longitudinales la dirección en que la perturbación se produce está bien definida (es la dirección de propagación), mientras que en las ondas transversales no sucede así, ya que la perturbación tiene lugar en un plano perpendicular a la dirección de propagación, pero en ese plano no está definida una dirección particular.
- Cuando la perturbación en una onda transversal es según una dirección bien definida la onda se dice que está polarizada.
- Si la dirección de vibración va variando de forma aleatoria de unos puntos a otros se dice que la onda no está polarizada.
- En el caso de una onda transversal en una cuerda una simple rendija vertical puede polarizar la onda, tal como se observa en la figura.



13 – Efecto Doppler.

- Hasta ahora hemos estudiado las ondas tomando tanto el foco emisor de la onda como el observador que la percibe en reposo. En este apartado trataremos lo que sucede cuando existe movimiento relativo entre ambos, y como se verá se produce un cambio en la frecuencia de la onda percibida que se denomina efecto Doppler.
- Veamos en primer lugar que es lo que sucede cuando el observador se mueve acercándose hacia el foco que permanece en reposo.



- Si el observador se encontrara en reposo, el número de ondas que percibe en un tiempo t es,

$$\frac{t}{P} = \nu t = \frac{\mathrm{v}t}{\lambda}$$

- Pero si el observador se acerca al foco con velocidad v_O, el número de ondas que percibe en un tiempo t es,

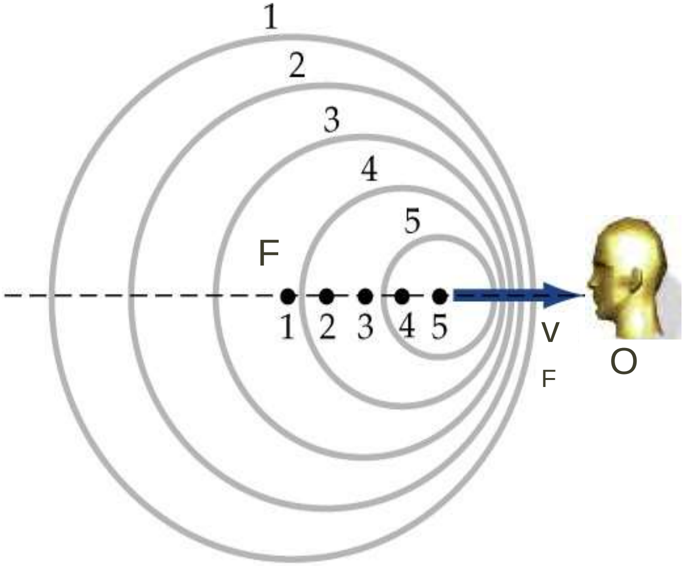
$$\frac{t}{P'} = \nu' t = \frac{(\mathrm{v}+\mathrm{v}_0)t}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\nu' = \frac{(\mathrm{v}+\mathrm{v}_0)}{\mathrm{v}/\nu} = \frac{(\mathrm{v}+\mathrm{v}_0)}{\mathrm{v}}\nu}$$

- Igualmente si el observador se aleja del foco con velocidad v_O, se tiene que,

$$\boxed{\nu' = \frac{(\mathrm{v}-\mathrm{v}_0)}{\mathrm{v}/\nu} = \frac{(\mathrm{v}-\mathrm{v}_0)}{\mathrm{v}}\nu}$$

13 – Efecto Doppler.

- Veamos ahora que sucede cuando es la fuente la que se acerca hacia el observador que permanece en reposo.



- Si la fuente se encontrara en reposo la longitud de onda de las ondas sería,

$$\lambda = vP = \frac{v}{\nu}$$

- Pero si la fuente que emite las ondas se acerca al observador con velocidad v_F, la longitud de onda es,

$$\lambda' = \frac{v - v_F}{\nu}$$

- Y la frecuencia de la onda percibida por el observador será,

$$\boxed{\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{v - v_F}\nu}$$

- Y del mismo modo si la fuente se aleja del observador con velocidad v_F, se tiene que

$$\boxed{\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{v + v_F}\nu}$$

13 – Efecto Doppler.

- Teniendo en cuenta lo anterior, la expresión general que agrupa a todas las situaciones posibles, es de la siguiente forma

$$\boxed{\nu' = \frac{v \pm v_o}{v \mp v_F}\,\nu}$$

Numerador

+ Observador se acerca al foco

– Observador se aleja del foco

Denominador

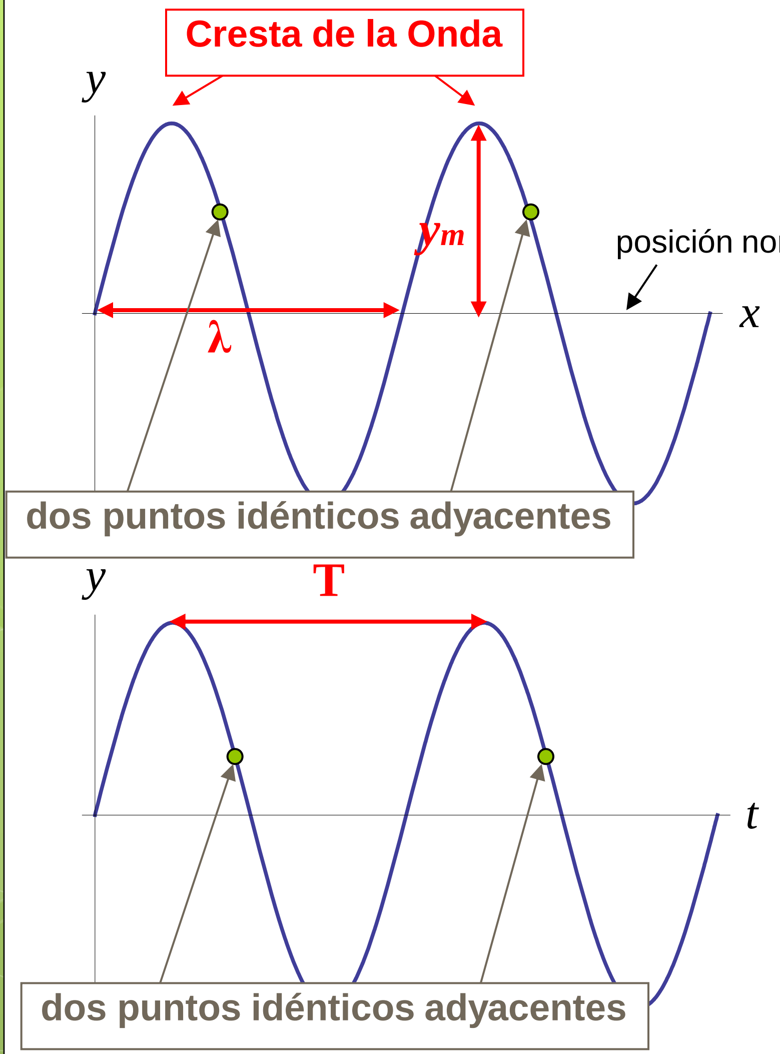
– Foco se acerca al observador

+ Foco se aleja del foco

Propiedades funciones sinusoidales

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \\
c\cos(\omega t+\phi) &= a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t) \\
d\sin(\omega t+\psi) &= a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t) \\
\cos\alpha &= \cos(-\alpha) \\
\sin\alpha &= -\sin(-\alpha) \\
\sin\alpha &= \sin(\alpha+2\pi) \\
\cos\alpha &= \cos(\alpha+2\pi)
\end{aligned}
$$

Ondas Sinusoidales o Armónicas



Cresta de la Onda:
punto en el cual el desplazamiento del elemento de medio es máximo respecto de su posición normal

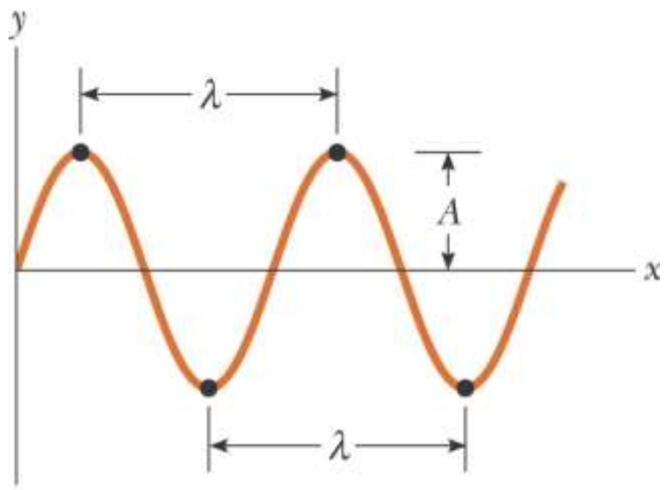
Longitud de Onda (λ):
distancia entre dos *crestas adyacentes* o dos *puntos idénticos adyacentes*

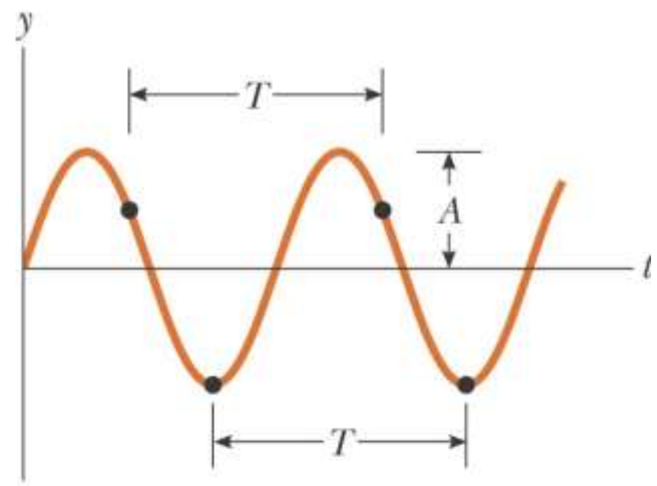
Amplitud (y_m):
corresponde al desplazamiento máximo de un elemento de medio respecto de su *posición normal*

Frecuencia (f):
número de crestas por unidad de tiempo

Período (T):
tiempo que transcurre mientras dos *crestas adyacentes* o dos *puntos idénticos adyacentes* pasan por un punto

Ondas Sinusoidales o Armónicas

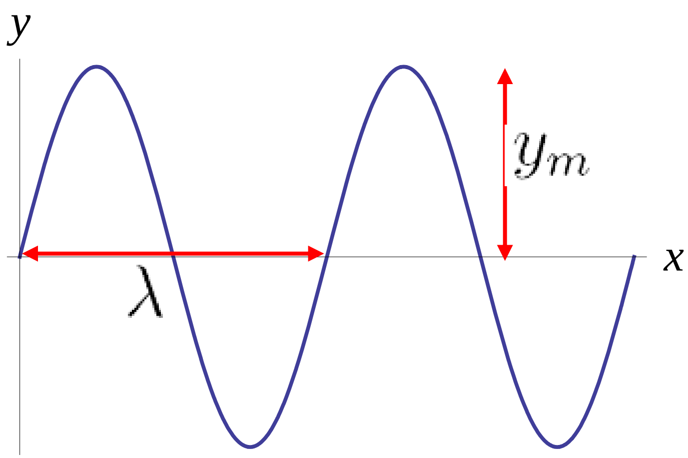




Es una foto de la onda!

Representación gráfica de la posición de un elemento de medio como función del tiempo

Ondas armónicas



$$y(x) = y_m \sin(ax)$$

$$y(0) = y(\lambda/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$y(\lambda/4) = y_m$$

$$y(t,x) = y_m \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

$$y(t,x) = y_m \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x + vt)\right]$$

v se denomina ***velocidad de fase***, λ es la ***longitud de onda*** e y_m es la ***amplitud***

Ondas armónicas

- Para una onda armónica tenemos: $\lambda = vT$ o:

$$y(t,x) = y_m \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$

- Con la función de esta forma es fácil notar la ***periodicidad*** de esta función, $y(t,x)$ tiene el mismo valor para $x, (x+\lambda), \ldots, (x+n\lambda), \ldots$
  y también para $t, (t+T), \ldots, (t+nT), \ldots$
- Definimos las constantes ***k = 2π / λ : número de onda*** y
  ω = 2π / T: frecuencia angular, de modo que:

$$y(t,x) = y_m \sin(kx - \omega t)$$

$$y(t,x) = y_m \sin(kx + \omega t)$$

- Note que se presenta la siguiente relación: $\lambda = vT \;\Rightarrow\; \omega = vk$

Fase y constante de fase

- La expresión general para una onda que viaje en la dirección x positiva es:

$$\boxed{y(t,x) = y_m \sin(kx - \omega t - \phi)}$$

donde $kx - \omega t + \phi$ se denomina ***fase de la onda*** y ϕ es la ***constante de fase***

- Dos ondas con la misma fase (o con fases que difieren en un múltiplo entero de 2π) se dice que ***"están en fase"***, ejecutan el mismo movimiento al mismo tiempo.

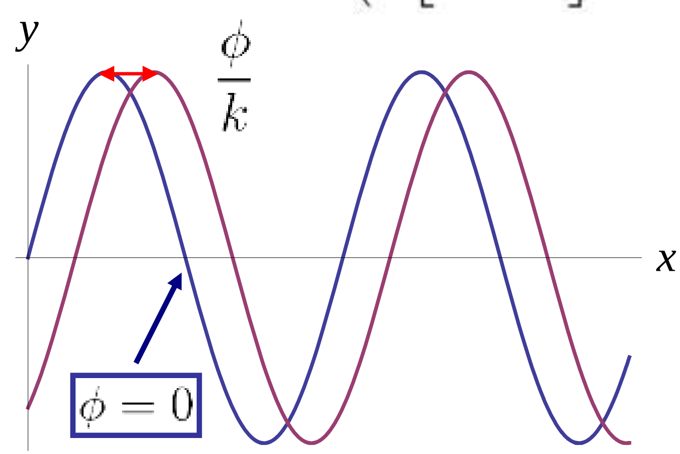
Fase y constante de fase

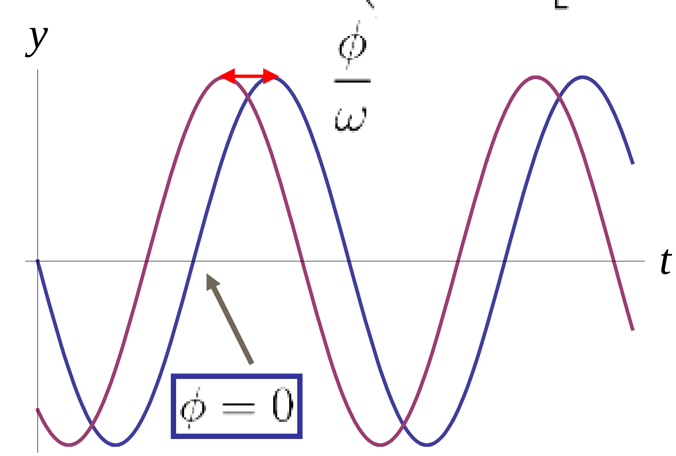
$$\boxed{y(t,x) = y_m \sin(kx - \omega t - \phi)}$$

- La constante de fase no afecta la forma de la onda, $\phi > 0$ a onda guía
  la onda hacia delante o hacia atrás en el espacio o $\phi < 0$ onda rezagada
  tiempo.

$$y(t,x) = y_m \sin\left(k\left[x - \frac{\phi}{k}\right] - \omega t\right)$$

$$y(t,x) = y_m \sin\left(kx - \omega\left[t + \frac{\phi}{\omega}\right]\right)$$





Movimiento de un elemento de medio

- Cualquier ***"elemento de medio"*** experimenta MAS respecto de su posición de equilibrio. Este movimiento es con la misma frecuencia y la misma amplitud que el movimiento ondulatorio

- Para un elemento particular en $x = x_1$

$$\boxed{y(t, x) = y_m \sin(kx - \omega t - \phi)}$$

$$\boxed{y(t) = y_m \sin(-\omega t - (\phi - kx_1)) = -y_m \sin(\omega t + \phi')}$$

Movimiento de un elemento de medio

$$\boxed{y(t,x) = y_m \sin(kx - \omega t - \phi)}$$

Velocidad transversal de un elemento de medio

$$v_y = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=cte} = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t - \phi) \quad \Rightarrow \quad v_{y,max} = \omega y_m$$

Aceleración transversal de un elemento de medio

$$a_y = \left(\frac{dv_y}{dt}\right)_{x=cte} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\omega^2 y_m \sin(kx - \omega t - \phi) \quad \Rightarrow \quad a_{y,max} = \omega^2 y_m$$

Ambos valores no son máximos simultáneamente. La velocidad es máxima cuando $y = 0$, mientras que la aceleración alcanza su valor máximo cuando $y = \pm y_m$