ECUACIONES DE MAXWELL EN EL VACÍO LEJOS DE LAS FUENTES

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Ec. de Onda

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \vec{E}$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \nabla^2 \vec{B}$$

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDA

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

$$k = 2\pi/\lambda$$

$$\omega = \frac{2\pi}{6} \left[\frac{rad}{s}\right]$$

Estas son ondas planas

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x x + k_y y + k z = cte = \xi$$

en un dado t_0

$$e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = e^{i(\underbrace{\xi - \omega t_0}_{cte})}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{i(\xi - \omega t_0)}$$

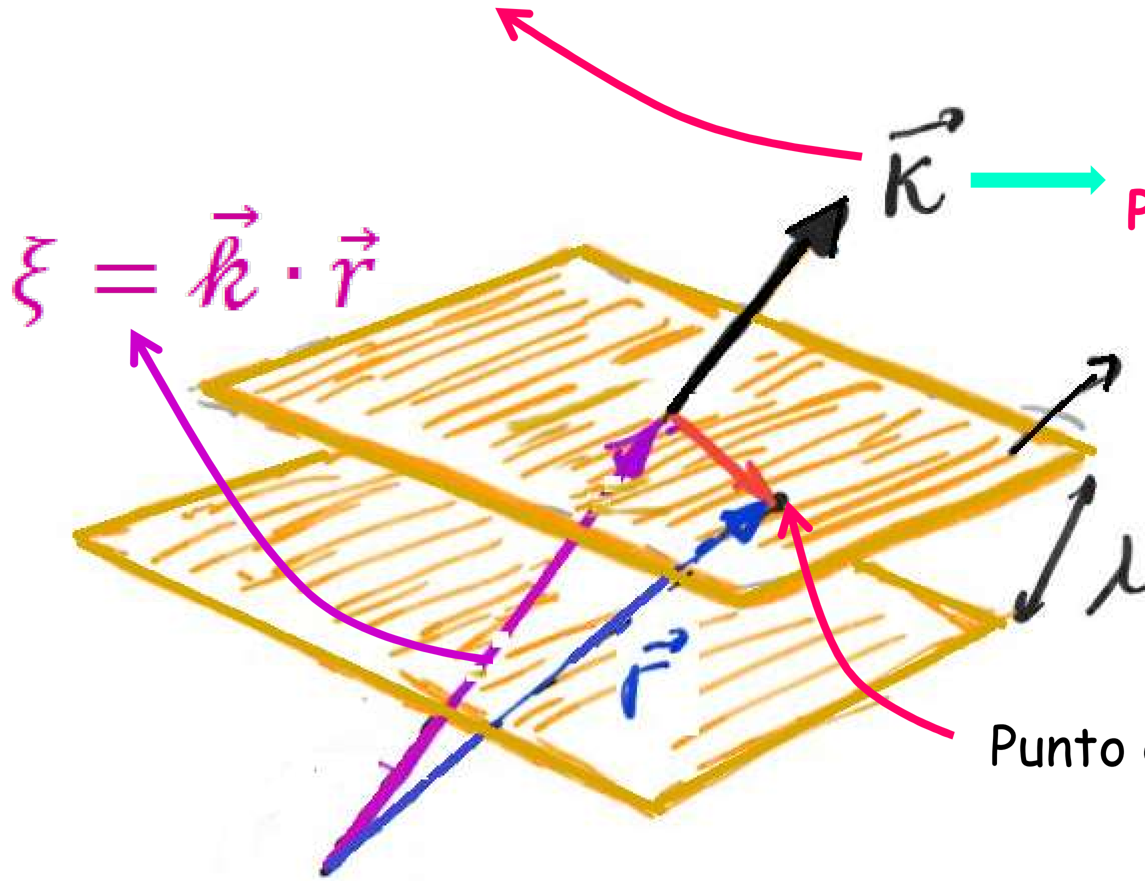
➡ **el vector Campo Eléctrico es <u>Invariable</u> en el plano**

Estas son ondas planas

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

Plano ➡ $\vec{k} \cdot \vec{r} = Cte = \xi$



Dirección de Propagación de la onda

Planos de fase constante

Punto del espacio en la posición **r**

Propiedades de los campos EM en una onda plana

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$

Si la onda se propaga en dirección del eje "x"

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 e^{i(k\cdot x-\omega t)} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \cdot e^{ik\cdot x} \cdot e^{-i\omega t}$$

$$\vec{E}_0 = E_{0x}\,\hat{i} + E_{0y}\,\hat{j} + E_{0z}\,\hat{k}$$

Veamos cómo son las derivadas espaciales y temporales de los campos, a fin de poder evaluar las ecuaciones de Maxwell

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \vec{E}_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{i(kx-\omega t)}\right) = \vec{E}_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{ikx} \cdot e^{-i\omega t}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \vec{E}_0 (ik) e^{ikx} e^{-i\omega t} = ik\left(\vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}\right)}$$

Luego, $\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = ik\vec{E}$ *Idem para B!!!*

Derivada temporal

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}$$

Idem para $\vec{B}$!!

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$$

Propiedades de los campos EM en una onda plana

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = ik\vec{E}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = i\vec{k}\cdot\vec{E}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = i\vec{k}\times\vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = -k^2\vec{E}$$

$$\nabla^2\vec{E} = k^2\vec{E}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{E}} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathrm{B}} = 0$$

IDEM PARA $\vec{B}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{B} = i\vec{k}\times\vec{B} \\ \nabla^2\vec{B} = k^2\vec{B} \end{cases}$

Propiedades de los campos EM en una onda plana

Reemplazando en ec. de Maxwel

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E} = \frac{k}{\omega}\left(\hat{u} \times \vec{E}\right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{E} \perp \vec{k}$$

El campo eléctrico y el magnético (por que la ∇ **B=0,** también) son perpendiculares a la dirección de propagación

Propiedades de los campos EM en una onda plana

Si $\hat{u}$ es el versor paralelo a la dirección de propagación, luego

$$\vec{k} = k\hat{u}$$

$$\vec{k} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{k}{\omega}\left(\hat{u} \times \vec{E}\right)}$$

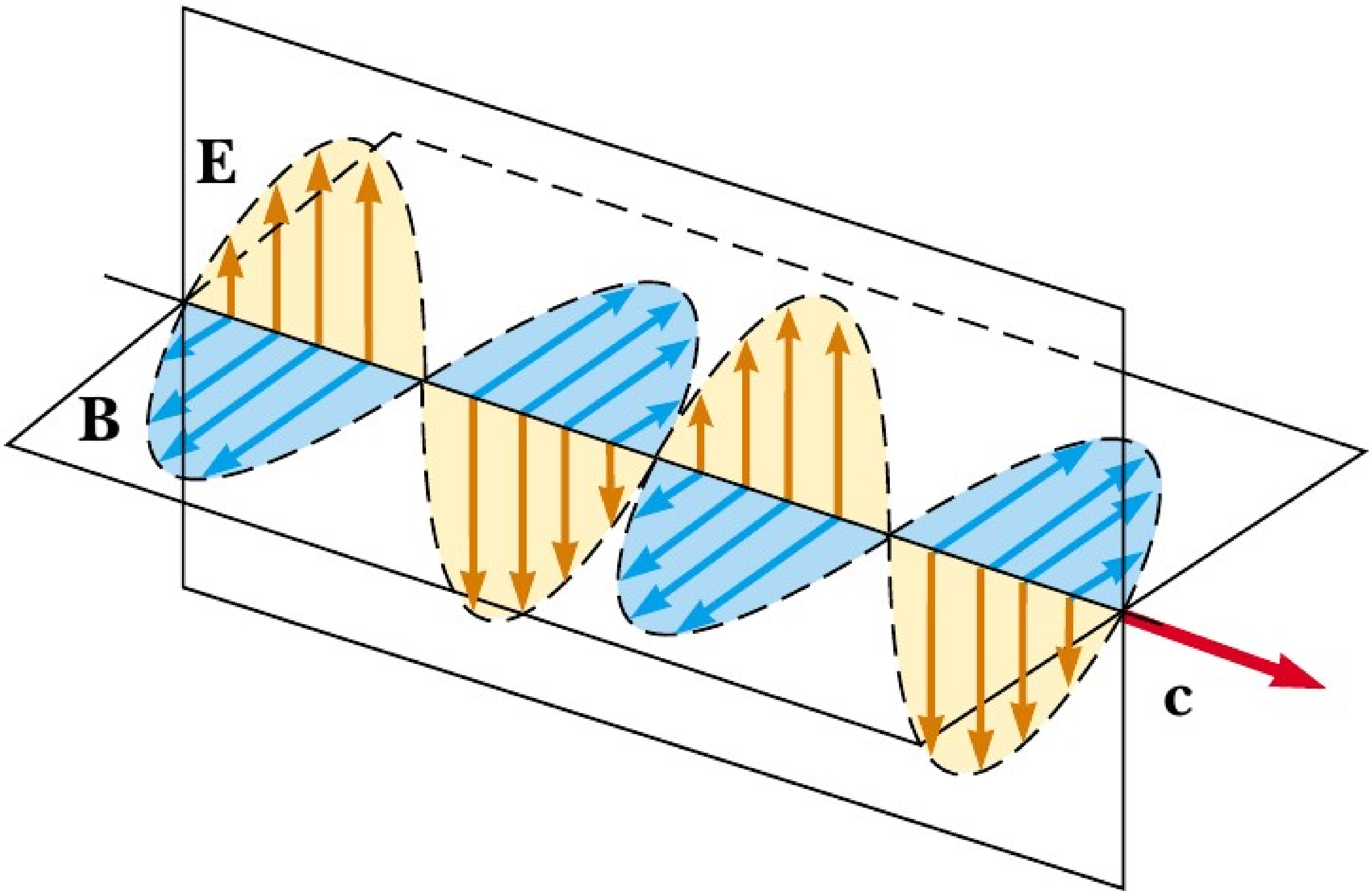
$$\left(\vec{B} \perp \hat{k}\right) \qquad \left(\vec{B} \perp \vec{E}\right)$$

dado que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \left(\vec{E} \perp \hat{k}\right)$

$$\boxed{\frac{\omega}{k} = c} \Rightarrow \boxed{\|\vec{B}\| = \frac{1}{c}\|\vec{E}\|}$$

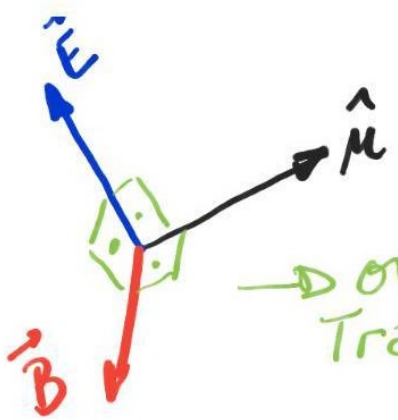
Onda EM plana:

Los campos E y B son perpendiculares entre sí, y a su vez son perpendiculares a la dirección de propagación.



Onda EM plana:

Los campos E y B son perpendiculares entre sí, y a su vez son perpendiculares a la dirección de propagación.



$\hat{u} = \frac{\vec{K}}{K}$

→ onda Transversal

$\hat{u}$ → dirección de propagación de la onda.

$\vec{K}$ → vector de onda.

$\|\vec{K}\| = K = \frac{2\pi}{\lambda}$

λ → Long. de onda.

$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{\tau}$ → Frecuencia

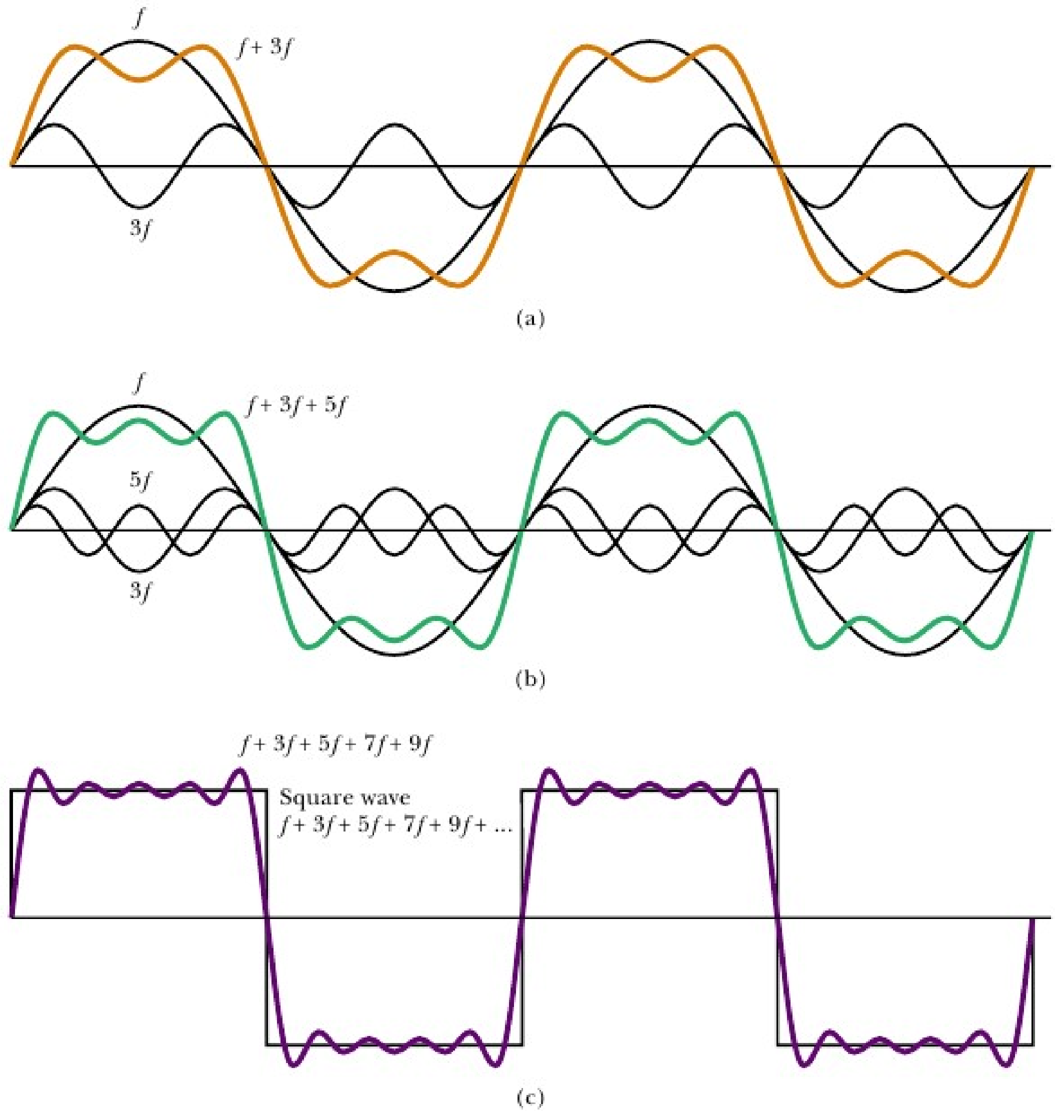
$[f] = [H_z]$ $\quad 1[H_z] = 1\,[1/s]$

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{K}\cdot\vec{r} - \omega t)} \\ \vec{B} = \frac{1}{c}\, \hat{u} \times \vec{E} \end{cases}$$

Ondas Sinusoidales

$$\tilde{\mathbf{E}}(z,t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(z,t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(kz-\omega t)}$$



Conservación de la Energía: Teorema de Poynting

Teorema de Poynting

$$\mathcal{U}_E = \frac{1}{2}\int_{\substack{\text{Todo}\\ \text{espacio}}} \epsilon_0 E^2 \, dV$$

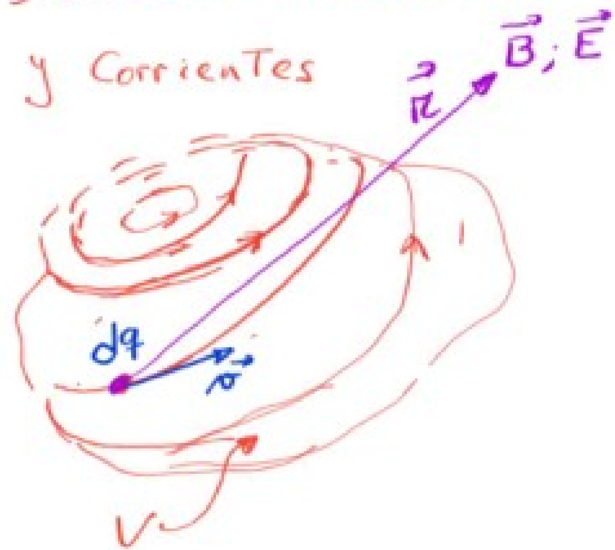
$$\mathcal{U}_B = \frac{1}{2}\int_{\substack{\text{Todo}\\ \text{espacio}}} \frac{B^2}{\mu_0} \, dV$$

$$\boxed{\mathcal{U}_{EM} = \frac{1}{2}\int_{\substack{\text{Todo}\\ \text{espacio}}} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) dV}$$

Energía Electromagnética

Energía almacenada en forma de campo eléctrico y magnético.

Dada una configuración de cargas y corrientes



el Trabajo de los campos sobre las cargas y corrientes es

$$d\vec{F}\cdot d\vec{\ell} = dq(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{\ell}$$

ahora $d\vec{\ell} = \vec{v}\,dt$ luego

$$d[\delta W] = d\vec{F}\cdot d\vec{\ell} = dq\left[\vec{E}\cdot\vec{v}\,dt + \cancel{(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v}}\,dt\right]$$

$$d[\delta W] = \vec{E}\cdot(dq\,\vec{v})\,dt$$

$$dq = \rho\,dV \Rightarrow d[\delta W] = \vec{E}\cdot\rho\vec{v}\,dt\,dV$$

$$dW = \left[\int_{\text{VOL}} \vec{E}\cdot\vec{J}\,dV\right]dt$$

donde $\vec{J} = \rho\vec{v}$ $\Big\{$ Densidad de Corriente Volumétrica

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \int_{Vol} \vec{E}\cdot\vec{J}\, dV$$

➡ Potencia del campo electromagnético

trabajo realizado por el campo EM sobre las cargas por unidad de tiempo

$$\vec{E}\cdot\vec{J} = ?$$

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{E}\cdot\vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times B) - \varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{E} - \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B})$$ ➡ $$\vec{B}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) - \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B})$$

$$\vec{E}\cdot\vec{J} = -\frac{\vec{B}}{\mu_0}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \varepsilon_0\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right)$$

$$\boxed{\vec{S} = \vec{E}\times\frac{\vec{B}}{\mu_0}} \rightarrow \text{Vector de Poynting}$$

$$\vec{E}\cdot\vec{J} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{\mu_0}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 E^2\right) - \vec{\nabla}\vec{S}$$

$$\vec{E}\cdot\vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t}u_{EM} - \vec{\nabla}\cdot\vec{S}$$

luego integrando en todo el volumen de fuentes

$$\int_V \vec{E}\cdot\vec{J}\, dV = -\frac{d}{dt}\int_V u_{EM}\, dV' \oiint_S \vec{S}\cdot d\vec{a}$$

$\vec{S}$ ➡ densidad de flujo de energía saliente por ud. de tiempo

$$\int \vec{E}\vec{J}\, dV + \frac{d}{dt}U_{EM} = -\oiint\left(\vec{E}\times\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right)d\vec{a}$$

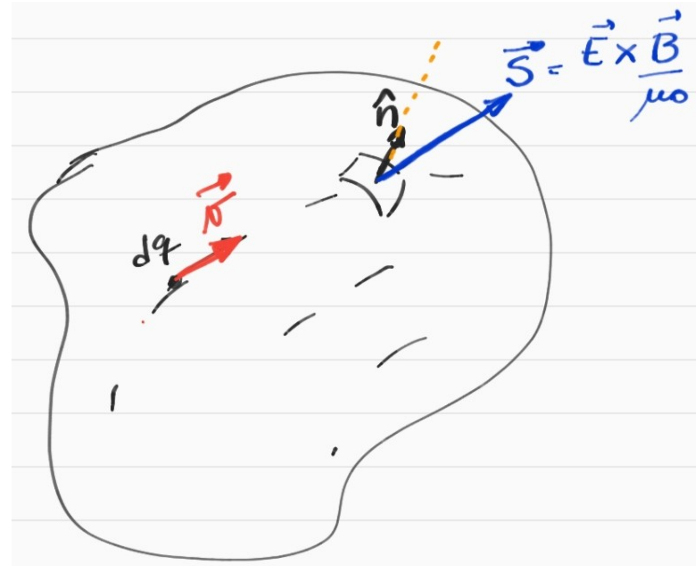
$$\oiint_{Sup}\vec{S}\cdot d\vec{a} = \int_{Vol}\vec{\nabla}\cdot\vec{S}\, dV$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{du_{EM}}{dt} - \oint_{Sup}\vec{S}\cdot da$$

↘ El Trabajo realizado x los Campos EM Sobre las cargas → incrementa su energía mecánica.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{vol} u_{mec}\, dV$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{vol} u_{mec}\, dV$$



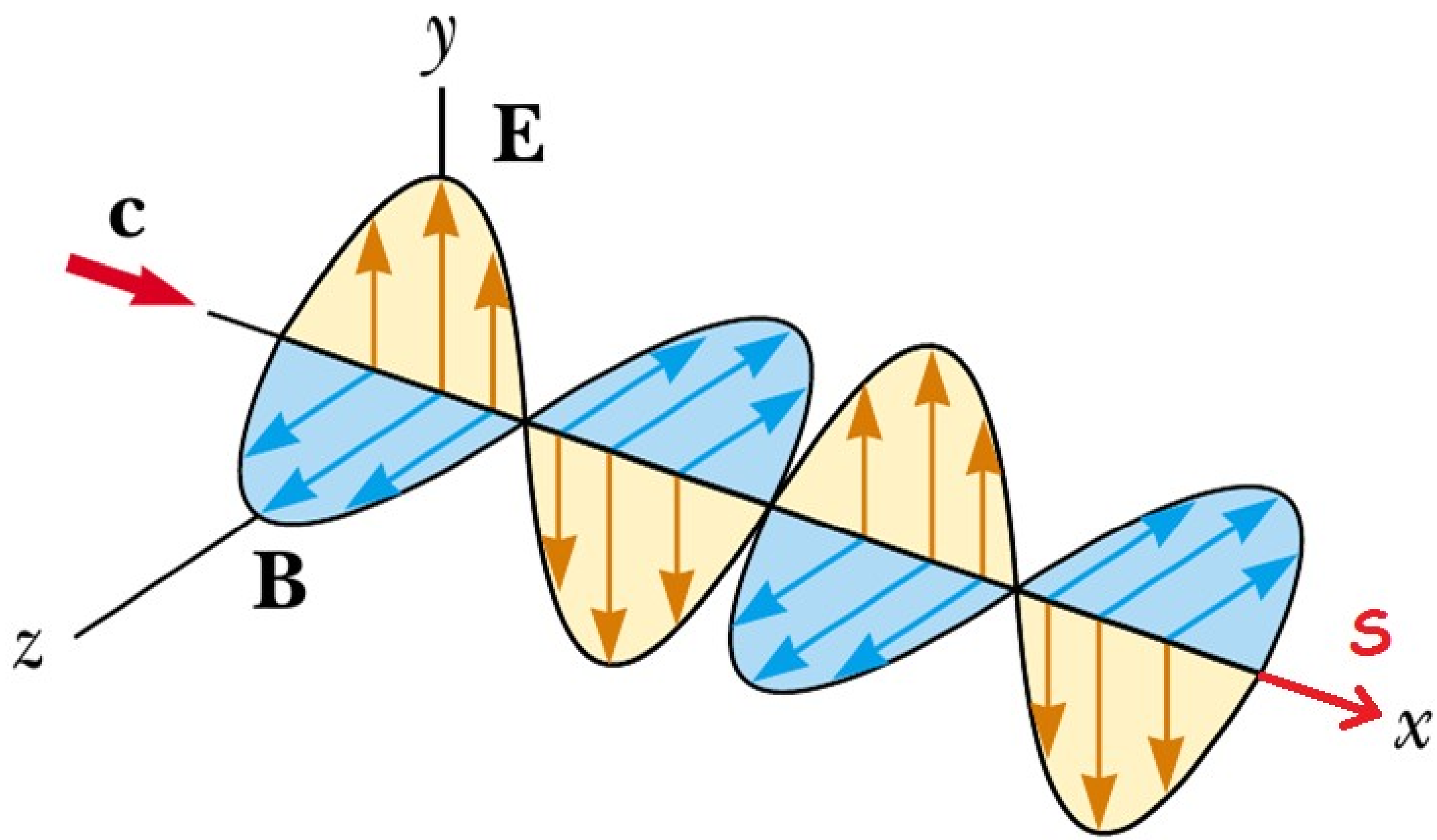
u_{mec} → energía mecánica de las cargas.

$$\frac{d}{dt}\int_{V} (u_{mec} + u_{EM})\, dV = -\oint_{Sup} \vec{S} \cdot d\vec{a}$$

LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA LOCAL REQUIERE QUE EL TRABAJO EXTERNO REALIZADO x EL SISTEMA x ud. DE TIEMPO SE TRADUZCA EN UN CAMBIO EN LA ENERGÍA E.M.

$$\left(\frac{d u_{EM}}{dt}\right) + \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0}\right)$$

$\vec{S} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ → vector de Poynting



y
E
c
B
z
S
x