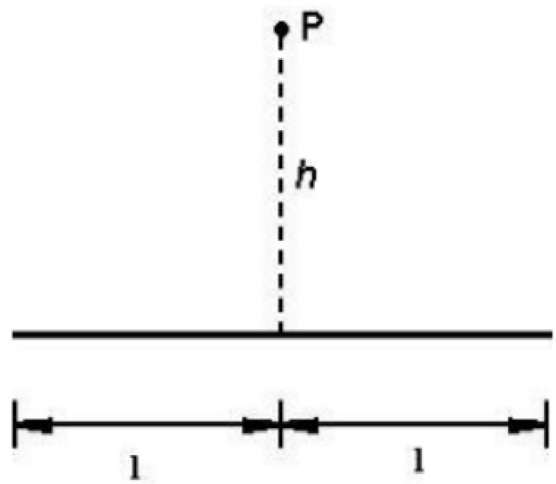

Figure 1: Densidad de carga lineal uniforme.

1 Problema 9. Guia 1.

Una barra de longitud $L = 2l$ está cargada con una densidad de carga lineal λ uniformemente distribuida. Sobre la bisectriz de la barra, a una altura h por encima de la misma se establece un punto P.

a) Hallar la fuerza (magnitud, dirección y sentido) sobre una carga de prueba Q_p colocada en el punto P.

b) Calcular el campo y el potencial electrostático en el punto P y graficarlos en función de la altura h ¿qué puede decir acerca del comportamiento asintótico de las funciones que describen al potencial y al campo electrostático cuando $h >> l$?

c) ¿qué expresión tienen el campo y el potencial electrostático cuando la longitud de la barra tiende a infinito?

1.1 Resolución

a) El campo electrico de una carga infinitesimal es

$$d\overrightarrow{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}\widehat{e}_r \tag{1}$$

donde r es la distancia entre el punto P donde se quiere calcular el campo electrico y el punto donde esta localizada la carga infinitesimal. El versor $\widehat{e}_r$ indica la dirección del campo electrico debido a la carga infinitesimal. Si tenemos una distribución de carga lineal λ, esta se puede escribir como $\lambda = \frac{dQ}{dx}$, y despejando dQ obtenemos $\lambda dx = dQ$. Como la distribución lineal esta uniformemente distribuida, es constante, por lo tanto $\int \lambda dx = \int dQ$, cuyo resultado es $\lambda L = Q$, donde L es la longitud total de la barra. Reemplazando $dQ = \lambda dx$ en la ecuación (1) e integrando

$$\overrightarrow{E} = \int_{-l}^{l} \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r^2}\widehat{e}_r \tag{2}$$

Falta reescribir r y el versor $\widehat{e}_r$ en términos de x. Utilizando argumentos de simetría, es posible darse cuenta de la componente en la dirección x sera nula, ya que la proyección del versor $\widehat{e}_r$ en el punto P de puntos simétricos con respecto al origen de coordenadas de la barra se cancelaran en la

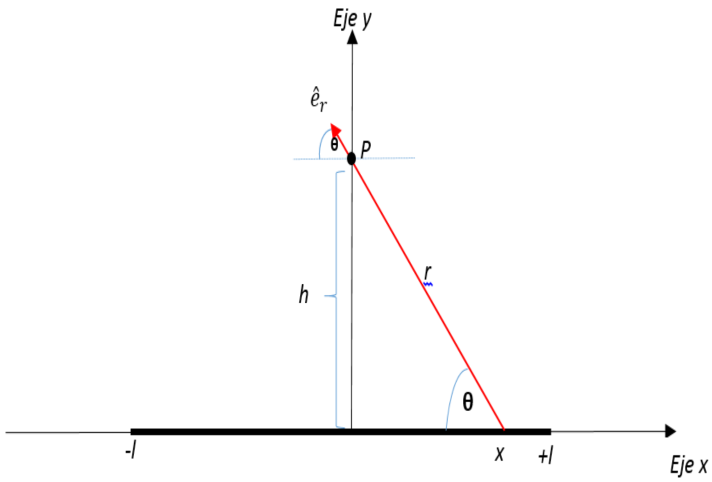

Figure 2: Esquema para la elección del angulo y sistema de coordenadas.

dirección x. En esta resolución se mostrara efectivamente como se produce esa cancelación. Para ello, podemos tomar un punto cualquiera de la barra como se ve en la figura, entonces el radio r se puede escribir mediante el teorema de Pitagoras como

$$r = \sqrt{h^2 + x^2} \tag{3}$$

y el versor $\widehat{e}_r$ se puede descomponer en sus direcciones x e y como

$$\widehat{e}_r = -\cos\theta \widehat{e}_x + \sin\theta \widehat{e}_y \tag{4}$$

Finalmente, $\cos\theta$ y $\sin\theta$ se pueden escribir de la siguiente manera

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} \qquad \sin\theta = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}} \tag{5}$$

Reemplazando la ec.(5), ec.(4) y la ec.(3) en la ecuación (2), el campo electrico queda

$$\overrightarrow{E} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^{l} \frac{xdx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} \widehat{e}_x + \frac{\lambda h}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^{l} \frac{dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} \widehat{e}_y \tag{6}$$

El integrando en la dirección $\widehat{e}_x$ es una función impar, es decir, los valores de $x < 0$ son los negativos de los valores de $x > 0$. Esto significa que al integrar desde $-l$ a l, las contribuciones de un lado y del otro lado del cero de coordenadas se cancelaran. En efecto, si calculamos la integral, el resultado es

$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^{l} \frac{xdx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{h^2 + x^2}} \Big|_{-l}^{l} = 0 \tag{7}$$

por otro lado, la componente en la dirección y da

$$E_y = \frac{\lambda h}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^{l} \frac{dx}{(h^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\lambda h}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{h^2\sqrt{h^2 + x^2}} \Big|_{-l}^{l} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{2l}{h\sqrt{h^2 + l^2}} \tag{8}$$

usando que $\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{Q}{2l}$, el campo electrico queda

$$\overrightarrow{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{h\sqrt{h^2 + l^2}} \widehat{e}_y \tag{9}$$

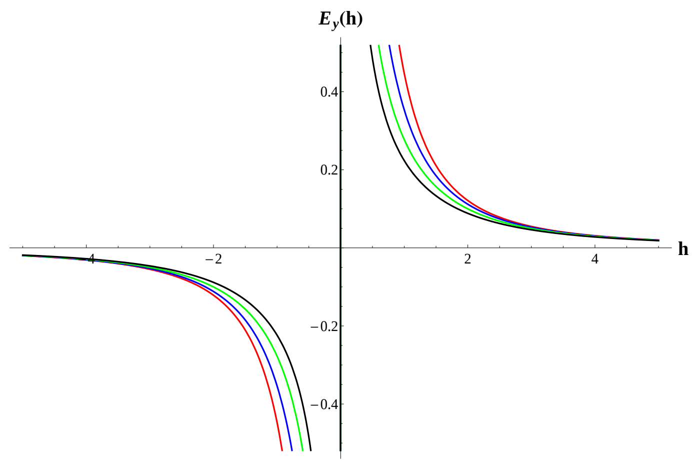

Figure 3: Campo electrico de una densidad de carga lineal uniforme para diferentes valores de l.

Con este campo electrico, la fuerza que sentira la carga de prueba sera

$$\overrightarrow{F} = Q_p \overrightarrow{E} = \frac{Q_p Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{h\sqrt{h^2+l^2}} \widehat{e}_y \tag{10}$$

b) El cálculo del potencial es más sencillo, ya que no involucra considerar direcciones en el espacio. En particular, el potencial de una carga infinitesimal es

$$dV = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{11}$$

donde r es de nuevo la distancia entre el punto P donde se quiere calcular el potencial y el punto sobre la barra que origina ese potencial. Si reemplazamos otra vez $dQ = \lambda dx$ e integramos en la ecuación (11) tenemos

$$V = \int_{-l}^{l} \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{12}$$

usando la ec.(3), el potencial queda

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^{l} \frac{dx}{\sqrt{h^2+x^2}} \tag{13}$$

cuyo resultado es

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln(\sqrt{h^2+x^2}+x)\mid_{-l}^{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 2l}\left[\ln(\frac{\sqrt{h^2+l^2}+l}{\sqrt{h^2+l^2}-l})\right] \tag{14}$$

no es dificil ver que si derivamos el potencial V en funcion de h encontramos el campo electrico. Recordar que h es una distancia, pero que esta en la dirección y por lo tanto $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial h}\widehat{e}_y$.

Para estudiar el comportamiento asintotico del campo y el potencial cuando $h >> l$, podemos escribir $\frac{l}{h} = \eta$, entonces sacando factor común h dentro de la raiz, el campo electrico queda escrito como

$$\overrightarrow{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{h^2\sqrt{1+\eta^2}} \widehat{e}_y \tag{15}$$

pero como $h >> l$, entonces $\eta <<< 1$

$$\lim_{\eta\to 0} \overrightarrow{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{h^2} \widehat{e}_y \tag{16}$$

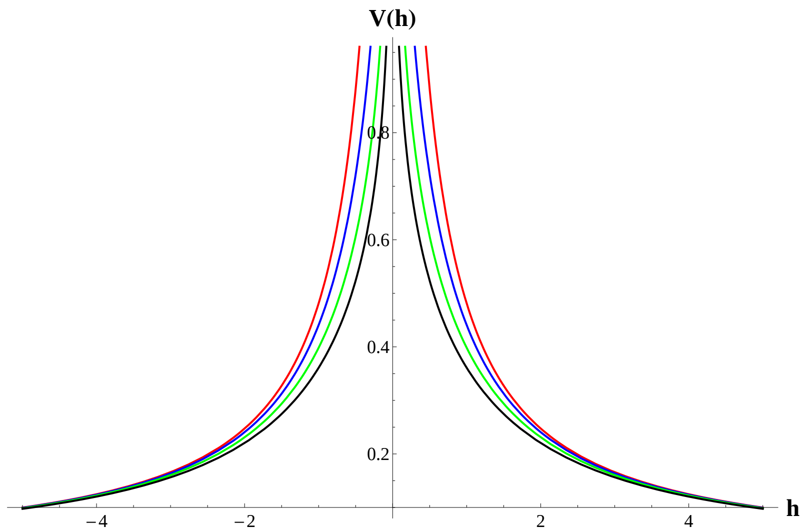

Figure 4: Potencial electrico de una densidad de carga lineal uniforme para diferentes valores de l.

que no es más que el campo electrico de una carga puntual Q a una distancia h. Esto significa que si nos alejamos mucho de la barra, el campo electrico que se ve es similar al campo electrico de una carga puntual $Q = \lambda L$.

Del mismo modo, podemos calcular el límite para el potencial sacando factor común h

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 2l}\left[\ln(\frac{\sqrt{1+\eta^2}+\eta}{\sqrt{1+\eta^2}-\eta})\right] \tag{17}$$

Tomando el límite $\eta \to 0$ sobre el potencial

$$\lim_{\eta\to 0} V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 2l}\ln(1) = 0 \tag{18}$$

lo que significa que el potencial desde muy lejos es aproxidamente cero.

c) Si ahora efectuamos el límite de $L \to \infty$ o $l \to \infty$, tenemos que sacar factor común l en las ecuaciones para el campo y el potencial

$$\overrightarrow{E} = \frac{2\lambda l}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{hl\sqrt{(h^2/l^2+1)}}\widehat{e}_y = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{h\sqrt{(h^2/l^2+1)}}\widehat{e}_y \tag{19}$$

tomando el límite $l \to \infty$

$$\lim_{l\to\infty}\overrightarrow{E} = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{h}\widehat{e}_y \tag{20}$$

en este caso, el campo electrico decae como $1/h$ para una barra de longitud infinita.

Del mismo modo, sacando factor común l en el potencial tenemos

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\ln(\frac{2}{0})\right] = ? \tag{21}$$

Como no es posible encontrar el potencial al hacer el limite de $l \to \infty$, debemos entender que es lo que está sucediendo. Basicamente nos estamos olvidando que cuando se cálcula potencial, en realidad se esta calculando una diferencia de potencial. El problema es que el otro punto donde estamos tomando la referencia de potencial es en el infinito, donde estamos elegiendo que el potencial vale cero. Pero esta elección no es posible hacerla cuando hacemos tender l a ∞, ya que si la densidad de carga lineal llega hasta el infinito, entonces el potencial no puede ser cero. Para resolver el problema del potencial, debemos definir algún otro punto de referencia. Volviendo a la ec.(14), podemos poner que la diferencia de potencial entre un punto a una altura h y otro punto a una altura h_0 es

$$\Delta V = V(h) - V(h_0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\ln(\frac{\sqrt{h^2+l^2}+l}{\sqrt{h^2+l^2}-l}) - \ln(\frac{\sqrt{h_0^2+l^2}+l}{\sqrt{h_0^2+l^2}-l})\right] \tag{22}$$

donde se reemplazo $Q/2l = \lambda$. La diferencia de logaritmos $\ln(a)-\ln(b)$ se puede escribir como $\ln(a/b)$, entonces

$$\Delta V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{(\sqrt{h^2+l^2}+l)(\sqrt{h_0^2+l^2}-l)}{(\sqrt{h^2+l^2}-l)(\sqrt{h_0^2+l^2}+l)}\right] \tag{23}$$

podemos sacar factor común l y entonces

$$\Delta V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{(\sqrt{(\frac{h}{l})^2+1}+1)(\sqrt{(\frac{h_0}{l})^2+1}-1)}{(\sqrt{(\frac{h}{l})^2+1}-1)(\sqrt{(\frac{h_0}{l})^2+1}+1)}\right] \tag{24}$$

ahora podemos tomar el límite para $l \to \infty$, para ello podemos escribir lo que esta adentro de la raiz como $\sqrt{(\frac{h}{l})^2+1} \sim 1 + \frac{1}{2}(\frac{h}{l})^2$ y $\sqrt{(\frac{h_0}{l})^2+1} \sim 1 + \frac{1}{2}(\frac{h_0}{l})^2$, entonces

$$\lim_{l\to\infty}\Delta V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{h_0^2}{h^2}\frac{(2+\frac{1}{2}(\frac{h}{l})^2)}{(2+\frac{1}{2}(\frac{h_0}{l})^2)}\right] \tag{25}$$

finalmente $\frac{h}{l} \to 0$

$$\lim_{l\to\infty}\Delta V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln(\frac{h_0^2}{h^2}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln(\frac{h_0}{h}) \tag{26}$$

Ahora la referencia para que el potencial sea cero no es el infinito, sino en $h = h_0$.