1 Problema 7. Guia 2.

Un dipolo de momento dipolar $\overrightarrow{p}$ se coloca en un campo eléctrico uniforme.

a) Calcular la fuerza y el momento resultante si el dipolo se coloca perpendicular al campo eléctrico.

b) Determinar la posición de equilibrio estable del dipolo dentro del campo eléctrico mencionado.

c) Si el dipolo se coloca formando un ángulo α_0 con la dirección del campo eléctrico, obtener una expresión para el momento de fuerza resultante en función del momento dipolar y de la posición angular inicial.

d) Determinar la energía de configuración del dipolo.

e) ¿Cuál es el trabajo mecánico necesario para hacer rotar el dipolo desde una posición de equilibrio estable a una posición donde forme un ángulo θ con $\overrightarrow{E}$?

1.1 Resolución

a) Un dipolo electrico o momento dipola electrico es un vector $\overrightarrow{p}$ que se define como $\overrightarrow{p} = q\overrightarrow{d}$, donde q es la magnitud de las dos cargas que forman el dipolo y $\overrightarrow{d}$ es un vector que va desde la carga $-q$ a la carga q.

El campo electrico se coloca en la dirección x, de modo tal que podemos decir que $\overrightarrow{E} = E\widehat{e}_x$. Si el dipolo eléctrico apunta en la dirección perpendicular al campo eléctrico, entonces $\overrightarrow{p} = qd\widehat{e}_y$. El campo electrico actua sobre cada una de las cargas, ejerciendo una fuerza electrica. Sobre la carga $+q$, el campo electrico generara una fuerza en la dirección positiva de las x, o sea,

$$\overrightarrow{F}_+ = qE\widehat{e}_x \tag{1}$$

y una fuerza en la dirección negativas de las x para la carga con signo negativo

$$\overrightarrow{F}_- = -qE\widehat{e}_x \tag{2}$$

La resultante de las dos fuerzas es

$$\overrightarrow{F}_+ + \overrightarrow{F}_- = 0 \tag{3}$$

Es decir, el campo electrico generara una fuerza resultante nula sobre el dipolo, esto significa que el dipolo no se trasladara en el espacio. Por otro lado, el momento de una fuerza se puede calcular segun la siguiente ecuación

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F} \tag{4}$$

donde el vector $\overrightarrow{r}$ es un vector que va desde el centro del sistema de coordenadas que hayamos elegido a la carga. En el caso del dipolo, tenemos dos cargas, lo que significa que habra dos contribuciones al momento resultante. Si colocamos el centro del sistema de coordenadas en la mitad del dipolo y si recordamos que este esta colocado en la dirección $\widehat{e}_y$, entonces los vectores $\overrightarrow{r}_+$ y $\overrightarrow{r}_-$ de cada una de las cargas seran

$$\overrightarrow{r}_+ = \frac{d}{2}\widehat{e}_y \qquad \overrightarrow{r}_- = -\frac{d}{2}\widehat{e}_y \tag{5}$$

Utilizando las fuerzas calculadas en las ec.(1) y (2), el momento resultante total es

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M}_+ + \overrightarrow{M}_- = \overrightarrow{r}_+ \times \overrightarrow{F}_+ + \overrightarrow{r}_- \times \overrightarrow{F}_- \tag{6}$$

$$= \begin{vmatrix} \widehat{e}_x & \widehat{e}_y & \widehat{e}_z \\ 0 & \frac{d}{2} & 0 \\ qE & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \widehat{e}_x & \widehat{e}_y & \widehat{e}_z \\ 0 & -\frac{d}{2} & 0 \\ -qE & 0 & 0 \end{vmatrix} = -qE\frac{d}{2}\widehat{e}_z - qE\frac{d}{2}\widehat{e}_z = -qEd\widehat{e}_z$$

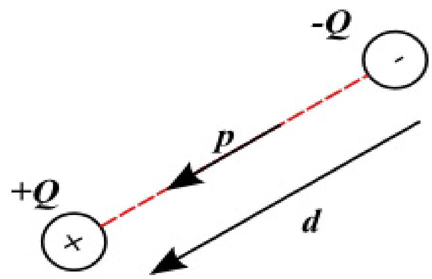

Figure 1: Dipolo electrico.

Es decir, el momento resultante total ejercido sobre el dipolo debido al campo electrico es $\overrightarrow{M} = -qEd\widehat{e}_z$, que apunta en el eje negativo de las z. Si utilizamos la regla de la mano derecha y ponemos el dedo pulgar en la dirección del momento resultante, al cerrar la mano, la dirección de los dedos restantes nos indicara como girara el dipolo electrico. El giro sera de modo que el dipolo electrico se alineara con el campo electrico.

Podriamos haber calculado el momento resultante de otra manera más directa, para ello podemos notar que los vectores $\overrightarrow{r}_+$ y $\overrightarrow{r}_-$ estan relacionados, ya que

$$\overrightarrow{r}_+ = -\overrightarrow{r}_- \tag{7}$$

y a su vez, las fuerzas sobre cada una de las cargas tambien

$$\overrightarrow{F}_+ = -\overrightarrow{F}_- \tag{8}$$

Si reemplazamos estas relaciones en la ecuación para el momento resultante ec.(6) tenemos que

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r}_+ \times \overrightarrow{F}_+ + \overrightarrow{r}_- \times \overrightarrow{F}_- = 2\overrightarrow{r}_+ \times \overrightarrow{F}_+ = 2\frac{d}{2}\widehat{e}_y \times qE\widehat{e}_x = qd\widehat{e}_y \times E\widehat{e}_x = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{E} \tag{9}$$

es decir, el momento resultante se puede escribir de manera general como el producto vectorial del momento dipolar electrico $\overrightarrow{p}$ y el campo electrico $\overrightarrow{E}$, sea cual sea la dirección de ambos.

b) De la ecuación (9) podemos calcular el modulo del momento resultante

$$\left|\overrightarrow{M}\right| = |\overrightarrow{p}| \left|\overrightarrow{E}\right| \sin\theta = qdE\sin\theta \tag{10}$$

donde θ es el ángulo entre el dipolo eléctrico y el campo eléctrico. Para que el dipolo electrico este en una posición de equilibrio, su momento debe ser cero, para que esto suceda, el angulo θ debe ser $\theta = 0$ o π. Es decir, hay dos posiciones de equilibrio, la primera es la posición en la cual el dipolo apunta en la misma dirección que el campo eléctrico ($\theta = 0$). La segunda posición de equilibrio es aquella en la cual el dipolo apunta en la dirección contraria al campo electrico ($\theta = \pi$). Esta segunda posición de equilibrio no es estable, ya que si giramos al dipolo un angulo muy pequeño, las fuerza electrica generara un torque sobre él que lo hara girar en sentido horario hasta que la carga positiva este a la derecha, es decir, que el dipolo electrico este apuntando en la dirección positiva de las x.

c) En este caso, el momento resultante sera directamente identico a la ecuación (10) reemplazando θ por α_0

$$\left|\overrightarrow{M}\right| = |\overrightarrow{p}| \left|\overrightarrow{E}\right| \sin\alpha_0 \tag{11}$$

d) Para determinar la energía de configuración del dipolo electrico debemos considerar que traemos a las cargas desde el infinito a sus posiciones. Para traer la carga negativa $-q$ a su posición no tenemos que realizar trabajo (asumiendo que el campo electrico externo que habia en los incisos anteriores no esta). Para luego traer la segunda carga positiva $+q$ a una distancia d de la primer carga tendremos un trabajo. Este trabajo deberia ser negativo, ya que la carga $-q$ atrae a la carga $+q$, entonces no nos costaria moverla desde el infinito hasta una distancia d. El trabajo se calcula como $W = q\Delta V$, donde en este caso, la carga q es la segunda carga que queremos traer y la difrerencia de potencial ΔV es la generada por la primer carga, entonces

$$W = q\frac{-q}{4\pi\epsilon_0 d} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d} < 0 \tag{12}$$

e) El trabajo mecánico para hacer rotar el dipolo electrico desde un ángulo inicial θ_i a un ángulo final θ_f se puede calcular segun la siguiente ecuación

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \left|\overrightarrow{M}\right| d\theta \tag{13}$$

Esta ecuación se obtiene simplemente calculando el trabajo para hacer rotar cada una de las cargas. Reemplazando el momento $\left|\overrightarrow{M}\right|$ por la ecuación (10) y calculando la integral obtenemos

$$W = -\left|\overrightarrow{p}\right| \left|\overrightarrow{E}\right| [\cos\theta_f - \cos\theta_i] \tag{14}$$

si $\theta_i = 0$, es decir, la posición inicial del dipolo es la de equilibrio, entonces el trabajo queda

$$W = -\left|\overrightarrow{p}\right| \left|\overrightarrow{E}\right| [\cos\theta_f - 1] \tag{15}$$

como el $\cos\theta_f$ siempre es menor que uno, entonces el trabajo es positivo. Podemos ver que el trabajo para hacer rotar el dipolo se puede calcular de una manera general, notando que aparece el modulo del dipolo electrico, el modulo de campo electrico y el coseno del ángulo entre los dos en diferentes posiciones. Esto se puede escribir como el producto escalar entre vectores

$$W = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E} \tag{16}$$

en el caso de la ecuación (15) debemos calcular el trabajo para los dos posibles ángulos.