Problema (14): $V(r) = A \cdot \dfrac{e^{-\lambda r}}{r}$ A, λ ctes

a).- $\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\left[\dfrac{\partial V}{\partial r} (\check{r}) + \dfrac{1}{r} \underbrace{\cancel{\dfrac{\partial V}{\partial \theta}}}_{0} (\check{\theta}) + \dfrac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \underbrace{\cancel{\dfrac{\partial V}{\partial \phi}}}_{0} (\check{\phi}) \right]$

(son cero debido a V es solo función de r)

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} (\check{r}) = -A \left[\frac{-\lambda \cdot e^{-\lambda r} \cdot r - e^{-\lambda r}}{r^2} \right] (\check{r})$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{A \cdot e^{-\lambda r} (\lambda r + 1)}{r^2} (\check{r})}$$

b) Obtención de $\rho(r)$:

Por ley de gauss: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left[A \cdot e^{-\lambda r} (\lambda r + 1) \left(\frac{\check{r}}{r^2}\right) \right] = A \cdot e^{-\lambda r} (\lambda r + 1) \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\check{r}}{r^2}\right) + \left(\frac{\check{r}}{r^2}\right) \cdot \vec{\nabla} \left[A e^{-\lambda r} (\lambda r + 1) \right]$$

uso regla del producto para la divergencia.

$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) = f \, \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} f$ donde $\begin{cases} f = A \cdot e^{-\lambda r} (\lambda r + 1) \\ \vec{A} = \dfrac{\check{r}}{r^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = A \cdot e^{-\lambda r} (\lambda r + 1) \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\check{r}}{r^2}\right) + \left(\frac{\check{r}}{r^2}\right) \cdot \left[A \cdot (-\lambda) \cdot e^{-\lambda r} (\lambda r + 1) + A \cdot e^{-\lambda r} \lambda \right] (\check{r})$$

$$= A \cdot e^{-\lambda r} (\lambda r + 1) \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\check{r}}{r^2}\right) - \frac{A \lambda^2 \cdot e^{-\lambda r}}{r} \overbrace{(\check{r}) \cdot (\check{r})}^{1}$$

Calculo de $\vec{\nabla} \cdot \left(\dfrac{\check{r}}{r^2}\right)$: $\vec{\nabla} \cdot \left(\dfrac{\check{r}}{r^2}\right) = 4\pi \delta^3(r)$

donde $\delta^3(r)$ es la función Delta de Dirac y se define como:

$$\delta^3(r) \begin{cases} 0 & r \neq 0 \\ \infty & r = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \int_{\substack{\text{todo} \\ \text{el espacio}}} \delta^3(r) \, d\tau = 1 \Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \delta^3(r) r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\phi = 1$$

Entonces reemplazando en expresión para la divergencia:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = A\cdot e^{-\lambda r}(\lambda r+1)\,4\pi\delta^3(r) - A\,\frac{\lambda^2\cdot e^{-\lambda r}}{r}$$

donde dado que $\delta^3(r)=0$ para $r\neq 0$ puedo expresar:

$$A\cdot e^{-\lambda r}(\lambda r+1)\,4\pi\delta^3(r) = A e^{-\lambda r}(\lambda r+1)\Big|_{r=0} 4\pi\delta^3(r) = A\cdot 4\pi\delta^3(r)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = A\cdot 4\pi\delta^3(r) - \frac{A\cdot\lambda^2\cdot e^{-\lambda r}}{r}$$

Entonces por la ley de gauss diferencial

$$\rho = \varepsilon_0\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \Rightarrow \boxed{\rho(r) = A\cdot\varepsilon_0\left(4\pi\delta^3(r) - \frac{\lambda^2\cdot e^{-\lambda r}}{r}\right)}$$

Cálculo de la carga total:

$$Q_T = \int_{\tau}\rho(r)\cdot d\tau = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} A\cdot\varepsilon_0\left(4\pi\delta^3(r) - \frac{\lambda^2\cdot e^{-\lambda r}}{r}\right) r^2\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot d\theta\cdot d\phi\cdot dr$$

$$Q_T = A\varepsilon_0\left[4\pi\cdot\underbrace{\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\delta^3(r)\cdot r^2\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi\cdot dr}_{=1\ \text{(por definición de } \delta^3(r))} - \lambda^2\int_0^{\infty} e^{-\lambda r}\cdot r\cdot dr\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}\cdot\phi\Big|_0^{2\pi}\right]$$

Evaluación de $\int_0^{\infty}\underbrace{e^{-\lambda r}}_{v'}\cdot\underbrace{r}_{u}\cdot dr$:

$$v' = e^{-\lambda r} \Rightarrow v = -\frac{e^{-\lambda r}}{\lambda}$$
$$u = r \Rightarrow u' = 1$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda r}\cdot r = -\frac{e^{-\lambda r}}{\lambda}\cdot r\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda r}}{\lambda}\cdot dr \qquad \Rightarrow \int_0^{\infty} u\, v'\, dr = u\cdot v\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u'\cdot v\, dr$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\left(\lim_{r\to\infty}\frac{r}{e^{\lambda r}} - 0\right) + \left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda r}\Big|_0^{\infty} \qquad \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-\lambda r}\cdot r\cdot dr = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= -\frac{1}{\lambda}(0 - 0) - \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{\infty} - 1\right) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Entonces:

$$Q_T = A\cdot\varepsilon_0\left[4\pi - \cancel{\lambda^2}\cdot\frac{1}{\cancel{\lambda^2}}\cdot\left(-\overbrace{\cos\pi}^{-1} + \overbrace{\cos 0}^{1}\right)\cdot 2\pi\right]$$

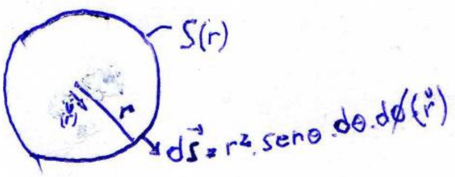
$$Q_T = A\varepsilon_0\left[4\pi - 4\pi\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_T = 0}$$

La carga neta en todo el espacio es nula.

<u>Otra manera de determinar la Q_T:</u>

Ley de Gauss integral $\quad \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

Entonces tomo esfera gaussiana de radio r:



$$Q(r) = \varepsilon_0 \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{A\cdot e^{-\lambda r}(\lambda r+1)}{r^2}(\hat{r})\cdot r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi\,(\hat{r})$$

$$= \varepsilon_0\, A\cdot e^{-\lambda r}(\lambda r+1)\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}\ \phi\Big|_0^{2\pi}\ \underbrace{(\hat{r})\cdot(\hat{r})}_{=1} = A\cdot\varepsilon_0\cdot e^{-\lambda r}(\lambda r+1)\cdot 4\pi$$

$$\Rightarrow Q(r) = A\cdot\varepsilon_0 4\pi\, e^{-\lambda r}(\lambda r+1)$$ $\rightarrow$ carga encerrada en esfera de Gauss de radio r

Para obtener Q_T debo hacer tender r a ∞:

$$Q_T = \lim_{r\to\infty} Q(r) = A\cdot\varepsilon_0 4\pi \lim_{r\to\infty}\frac{(\lambda r+1)}{e^{\lambda r}} = A\varepsilon_0 4\pi \lim_{r\to\infty}\frac{\lambda}{\lambda e^{\lambda r}} = 0$$

$\Rightarrow \boxed{Q_T = 0}$ Como era de esperar dado que el teorema de la divergencia se debe cumplir: $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_\tau \nabla\cdot\vec{E}\, d\tau$