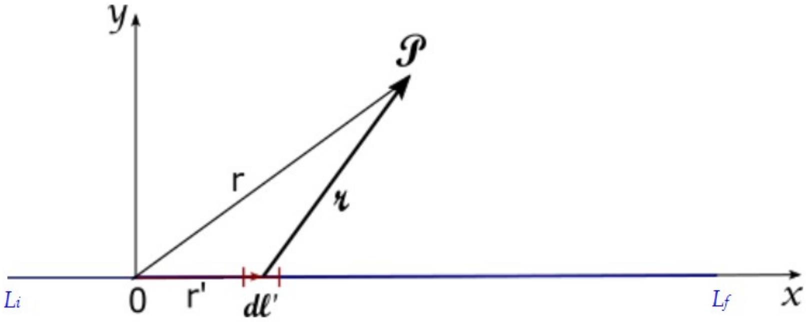
**Problema 1** Considere una línea de carga de longitud L, la cual porta una densidad de carga uniforme +λ. Considere al origen del sistema de coordenada fijo en el centro de la línea, con el eje z paralelo a la misma.

Obtenga una expresión para la intensidad, dirección y sentido del campo eléctrico en todo el espacio




Calculemos el campo en un punto $\mathscr{P}$ arbitrario del espacio, ubicado en una posición $\vec{\boldsymbol{r}}$ respecto del origen del sistema de coordenadas $(x, y, z)$ (el eje z no está representado en la gráfica, es el perpendicular a la página)

La contribución al campo eléctrico en el punto $\mathscr{P}$, $d\vec{E}(r)$, debida a la carga, $dq'$, del elemento de línea, $d\ell'$, tiene la siguiente expresión:

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq' \cdot \vec{\mathscr{r}}}{\|\vec{\mathscr{r}}\|^3} \qquad \text{E- 1}$$

Donde, el vector posición del punto $\mathscr{P}$ respecto del elemento de carga $dq' = \lambda \cdot d\ell'$, es

$$\vec{\mathscr{r}} = \vec{r} - \vec{r}'$$

es la posición del punto $\mathscr{P}$ *es*,

$$\vec{r} = x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\,\widehat{\boldsymbol{k}} \qquad \text{E- 2}$$

la posición del elemento de carga que estamos considerando en la expresión de $d\vec{E}(r)$,

$$\vec{r}' = x'\,\hat{\boldsymbol{\imath}} \qquad \text{E- 3}$$

y la cantidad de carga contenida en $d\ell'$ es

$$dq' = \lambda \cdot d\ell' = \lambda \cdot dx' \qquad \text{E- 4}$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación, E- 1,

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cdot dx' \cdot \left[\left(x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\,\widehat{\boldsymbol{k}}\right) - (x'\hat{\boldsymbol{\imath}})\right]}{\left\|\left[\left(x\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\,\widehat{\boldsymbol{k}}\right) - (x'\hat{\boldsymbol{\imath}})\right]\right\|^3} \qquad \text{E- 5}$$

Operando sobre esta expresión,

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cdot dx' \cdot \left[(x - x')\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\,\widehat{\boldsymbol{k}}\right]}{\left[(x - x')^2 + y^2 + z^2\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{E- 6}$$

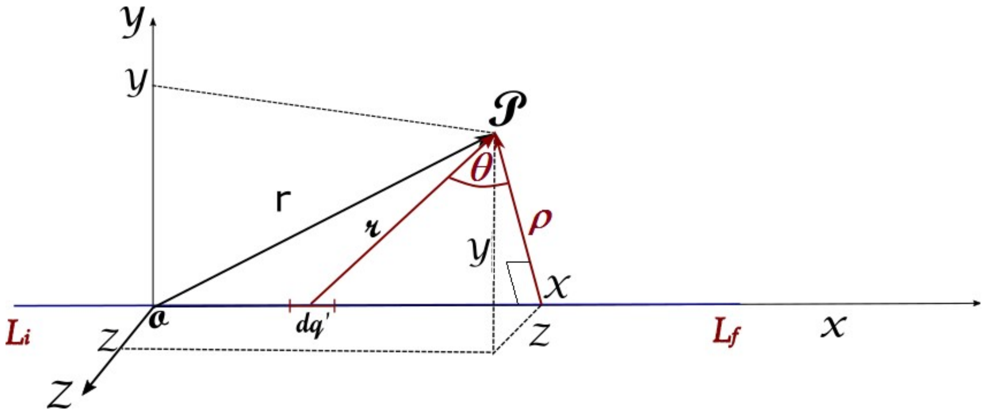
El campo eléctrico neto en P se obtiene integrando la contribución de toda la línea de carga, esto es, integrando a los largo de la variable $x'$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_0^L d\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{dx' \cdot \left[(x-x')\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\,\widehat{\boldsymbol{k}}\right]}{[(x-x')^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{E- 7}$$

Ahora bien, dado que la integración es sobre la coordenada $x'$ y que claramente este problema claramente tiene simetría en torno al $eje\ x$, podemos simplificar la expresión de la anterior expresión tomando en cuenta esta simetría,(ver figura de abajo)

Tal como puede verse en el gráfico

$$y\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\,\widehat{\boldsymbol{k}} = \rho\,\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\rho}} \qquad \Longrightarrow \qquad y^2 + z^2 = \rho^2$$




Reemplazando en E- 7

$$E_x(x,\rho) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{Li}^{L_f} \frac{(x-x')\cdot dx'}{[(x-x')^2+\rho^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_\rho(x,\rho) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{L_i}^{L_f} \frac{\rho\cdot dx'}{[(x-x')^2+\rho^2]^{\frac{3}{2}}} \qquad \text{E- 8}$$

Para resolver la integral aplicamos un cambio de variable,

$$sen(\theta) = \frac{(x-x')}{[(x-x')^2+\rho^2]^{\frac{1}{2}}} \qquad\qquad (x-x')^2+\rho^2 = \frac{\rho^2}{cos^2(\theta)}$$

$$\frac{(x-x')}{\rho} = tan(\theta) \qquad \text{E- 9}$$

Diferenciando la última expresión,

$$\frac{-dx'}{\rho} = d\big(tan(\theta)\big) = \frac{d\theta}{cos^2(\theta)} \qquad \text{E- 10}$$

Reemplazando en las integrales E- 8,

$$E_x(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{\theta_i}^{\theta_f} sen(\theta)\frac{cos^2(\theta)}{\rho^2}\frac{(-\rho)}{cos^2(\theta)}d\theta$$

E- 11

$$E_\rho(\vec{r}) = \frac{\lambda\cdot\rho}{4\pi\epsilon_0}\int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{cos^3(\theta)}{\rho^3}\frac{(-\rho)}{cos^2(\theta)}d\theta$$

Simplificando,

$$E_x(x,\rho) = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\rho}\int_{\theta_i}^{\theta_f} sen(\theta)\,d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\rho}(\cos(\theta_L) - \cos(\theta_0))$$

E- 12

$$E_\rho(x,\rho) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\rho}\int_{\theta_i}^{\theta_f} cos(\theta)d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\rho}\left(sen(\theta_L) - sen(\theta_0)\right)$$

Reemplazando la expresión para los extremos de integración,

$$sen(\theta_f) = \frac{(x-L_f)}{\left[(x-L_f)^2+\rho^2\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad sen(\theta_i) = \frac{x}{[(x-L_i)^2+\rho^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$cos(\theta_f) = \frac{\rho}{\left[(x-L_f)^2+\rho^2\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad cos(\theta_i) = \frac{\rho}{[(x-L_i)^2+\rho^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Luego:

$$E_x(x,\rho) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\left[(x-L_f)^2+\rho^2\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{[(x-L_i)^2+\rho^2]^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$E_\rho(x,\rho) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\rho}\left(\frac{(x-L_f)}{\left[(x-L_f)^2+\rho^2\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{(x-L_i)}{[(x-L_i)^2+\rho^2]^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$\vec{E}(x,\rho) = E_x\cdot\hat{\boldsymbol{\imath}} + E_\rho\,\hat{\boldsymbol{e}}_\rho$$

Si la distancia $r \gg L$ vemos que cuando calculamos el campo a una distancia muy grande de la distribución de cargas, esto es, si $x \to 0\ y\ \rho \gg L$,

$$\lim_{\rho\gg L}\left[\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho}\right)\right] = 0$$

$$\lim_{\rho\gg L}\left[\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\rho}\left(\frac{L/2}{\rho}-\frac{-L/2}{\rho}\right)\right] = \frac{\lambda L}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\rho^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\cdot\rho^2}$$

Este es el campo de una carga puntual cuya carga neta es $Q = \lambda L$

$$E_x(x,\rho) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\left[\left(x-L_f\right)^2+\rho^2\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{[(x-L_i)^2+\rho^2]^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$E_\rho(x,\rho) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\rho}\left(\frac{\left(x-L_f\right)}{\left[\left(x-L_f\right)^2+\rho^2\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{(x-L_i)}{[(x-L_i)^2+\rho^2]^{\frac{1}{2}}}\right)$$

Si la longitud de la línea de carga tiende a infinito (lo cual en física es equivalente a decir que estamos calculando el campo en posiciones $r \ll L$, o sea $x, \rho \ll L$), tenemos que:

$$\lim_{L\to\infty} E_x = \lim_{L\to\infty}\left[\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\left[\left(x-L_f\right)^2+\rho^2\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{[(x-L_i)^2+\rho^2]^{\frac{1}{2}}}\right)\right] \to 0$$

$$\lim_{L\to\infty} E_\rho = \lim_{L\to\infty}\left[\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\rho}\left(\frac{(x-L)}{\left[\left(x-L_f\right)^2+\rho^2\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{x}{[(x-L_i)^2+\rho^2]^{\frac{1}{2}}}\right)\right] \to \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{2}{\rho}$$

Por lo tanto $E_x$ se anula cuando calculamos el campo cerca de la línea de carga, lejos de los bordes. Bajo estas condiciones el campo eléctrico solo tiene componente radial $E_\rho$

Para: $L \to \infty$,

$$\vec{E}_{L\to\infty} = \frac{\lambda}{2\pi\,\epsilon_0\,\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{\rho}}$$