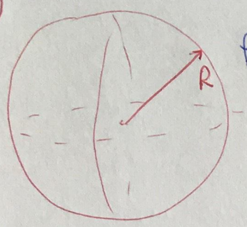
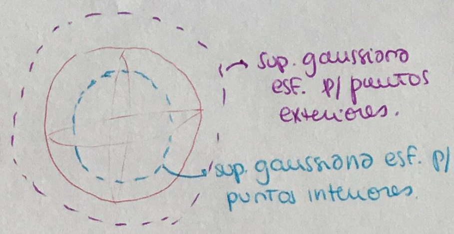
Recuperatorio primer examen parcial

1



$\rho(r) = K \cdot r$



a. Carga neta de la esfera: $Q=\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(Kr)\,r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr = 4\pi K \frac{R^4}{\cancel{4}}$

$$Q=\pi K R^4$$

b. Para encontrar el campo en todo el espacio podemos emplear la ley de Gauss. Debido a la simetría del problema el campo se encuentra en la dirección radial y es constante para puntos pertenecientes a superficies esféricas.

- Puntos en el interior ($r<R$)

$$\oint \vec{E}_{in}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \longrightarrow E_r 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} K r^3 \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr = \frac{\pi K r^4}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E_r = \frac{\cancel{\pi} K r^{\cancel{4}2}}{4\cancel{\pi}\cancel{r^2}\varepsilon_0} \longrightarrow \vec{E}_{in} = \frac{Kr^2}{4\varepsilon_0}\hat{r}$$

- Para puntos en el exterior ($r>R$)

$$\oint \vec{E}_{out}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \longrightarrow E_r 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\pi K R^4}{\varepsilon_0} \longrightarrow E_r = \frac{\cancel{\pi}KR^4}{4\cancel{\pi}r^2\varepsilon_0} \longrightarrow \vec{E}_{out} = \frac{KR^4}{4\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

c. Para calcular el potencial en todo el espacio empleemos $V(r) = -\int_{Ref}^{r}\vec{E}\cdot d\vec{l}$ con el punto de referencia $Ref = \infty$.

- Para $r>R$

$$V_{out}(r) = -\int_\infty^r \vec{E}_{out}\cdot d\vec{l} = -\int_\infty^r \frac{KR^4}{4\varepsilon_0 r^2}\,dr = -\frac{KR^4}{4\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_\infty^r = \frac{KR^4}{4\varepsilon_0 r}$$

- Para $r<R$

$$V_{in}(r) = -\int_\infty^R \vec{E}_{out}\cdot d\vec{l} - \int_R^r \vec{E}_{in}\cdot d\vec{l} = -\int_\infty^R \frac{KR^4}{4\varepsilon_0 r^2}\,dr - \int_R^r \frac{Kr^2}{4\varepsilon_0}\,dr = -\frac{KR^4}{4\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_\infty^R - \frac{K}{4\varepsilon_0}\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_R^r =$$

$$V_{in}(r) = \frac{KR^{\cancel{4}3}}{4\varepsilon_0\cancel{R}} - \frac{K}{12\varepsilon_0}(r^3-R^3) = \frac{K}{\varepsilon_0}\left(\frac{R^3}{3}-\frac{r^3}{12}\right)$$

d.