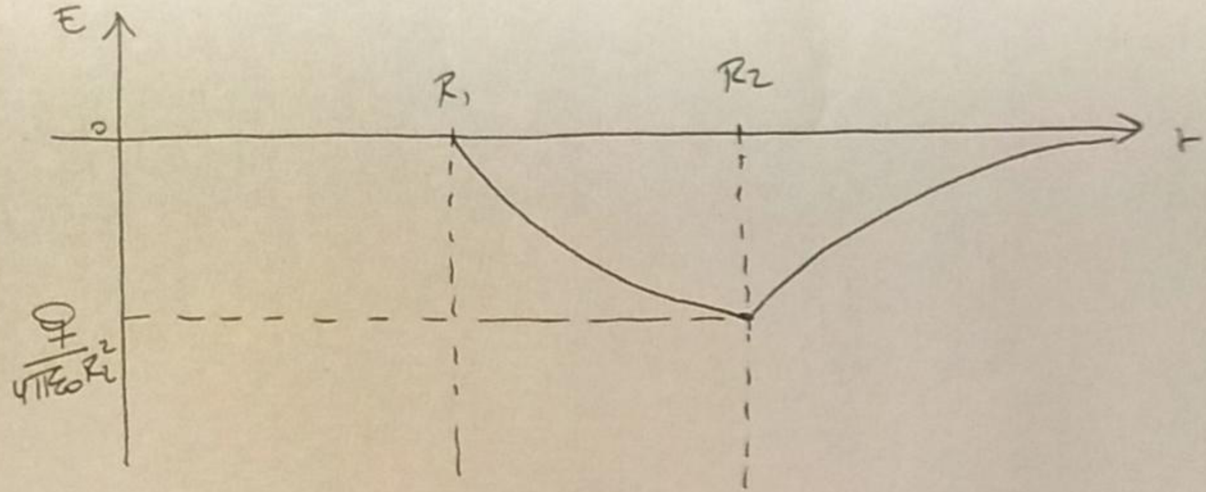
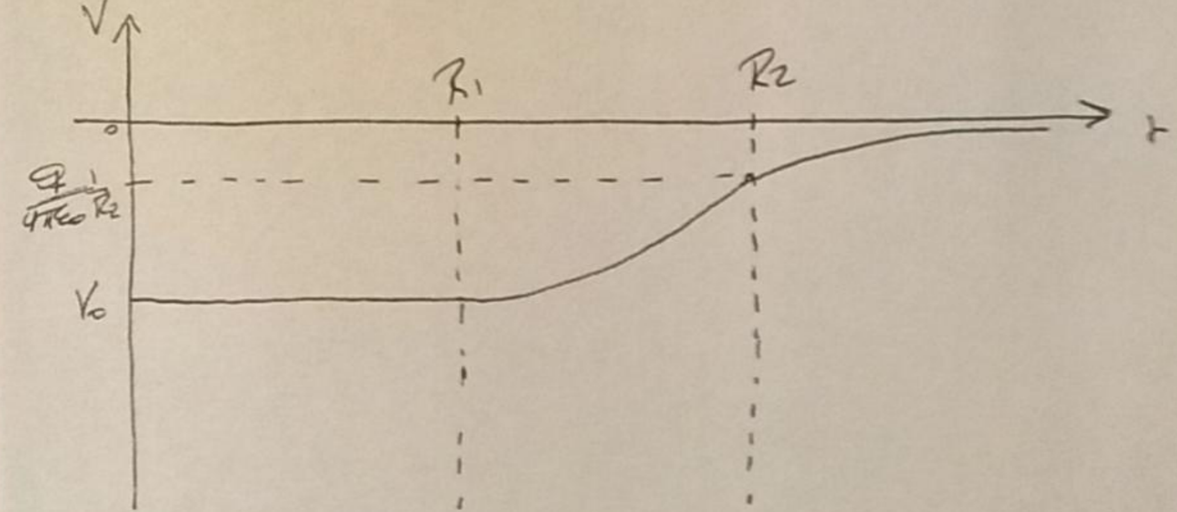
• TEMA 2: $q < 0$

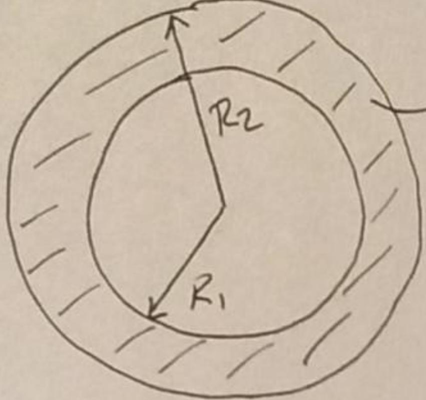




$$V_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{(R_2^3 - R_1^3)}\left(\frac{R_1^2}{2} + R_1^2 - \frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^3}{R_2}\right)\right]$$

1er Parcial FÍSICA II

Problema 4



Carga Q distribuida uniformemente en el cascarón

∴ La densidad de carga ρ es $\rho = Q/V_c$

donde V_c es el volumen total del cascarón:

$$V_c = \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3) \rightarrow \rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)}$$

a) Campo eléctrico en todo el espacio:

(i) $r < R_1$. Por la simetría esférica del problema, y por estar Q distribuida uniformemente, sé que la dirección de $\bar{E}$ va a ser siempre radial y constante para un radio dado → Aplico Gauss en todas las regiones

La superficie gaussiana es una esfera

$\oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$, para $r < R_1$, $Q_{enc} = 0$, ya que la carga está en el cascarón entre R_1 y R_2

∴ $\oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = 0 = |\bar{E}| \oint ds \Rightarrow \bar{E} = 0$ para $r < R_1$

(ii) $R_1 < r < R_2$: Tomo la sup. gaussiana para un r entre R_1 y R_2:

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \quad , \text{ donde } \oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = |\bar{E}| \, 4\pi r^2$$

y $Q_{enc} = \int \rho \, dV$ → la integral es sobre toda la sup. gaussiana, pero hay densidad de carga solo en el cascarón,

En otras palabras, se tiene:

$$\rho(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

Luego, $Q_{enc} = \int \rho \, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \rho \, r'^2 \operatorname{sen}\theta \, dr' d\theta \, d\phi$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{R_1}^{r} \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)} r'^2 \operatorname{sen}\theta \, dr' d\theta \, d\phi$$

$$= \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)} 4\pi \left.\frac{r'^3}{3}\right|_{R_1}^{r} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)} \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3)$$

$$\Longrightarrow Q_{enc} = Q\frac{(r^3 - R_1^3)}{(R_2^3 - R_1^3)}$$

$$\therefore |\bar{E}| \, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{(r^3 - R_1^3)}{(R_2^3 - R_1^3)} \Rightarrow \bar{E} = \frac{Q\,(r - R_1^3/r^2)}{4\pi\varepsilon_0(R_2^3 - R_1^3)}\hat{r}$$

para $R_1 < r < R_2$

(iii) $r > R_2$ → Sup. gaussiana para en $r > R_2$

∴ La carga encerrada es siempre la carga total del cascarón

→ $q_{enc} = q$ → $\oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = |\bar{E}|\, 4\pi r^2 = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

$$\therefore \quad \bar{E} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r^2}\, \hat{r} \quad \text{para} \quad r > R_2$$

En resumen, el campo en todo el espacio es:

$$\bar{E} = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \dfrac{q}{4\pi \varepsilon_0 (R_2^3 - R_1^3)} \left(r - \dfrac{R_1^3}{r^2} \right) \hat{r} & R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{q}{4\pi \varepsilon_0} \dfrac{\hat{r}}{r^2} & r > R_2 \end{cases}$$

b) Potencial en todo el espacio

Lo calculamos a partir del campo:

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} E\, dr'$$

(iii) $r > R_2$ → $V(r) = -\displaystyle\int_{\infty}^{r} \frac{q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r'^2}\, dr' = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r}$

(ii) $R_1 < r < R_2$:

$$V(r) = -\left[\int_{\infty}^{R_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'^2}\,dr' + \int_{R_2}^{r} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (R_2^3 - R_1^3)}\left(r' - \frac{R_1^3}{r'^2}\right)dr'\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(R_2^3 - R_1^3)}\int_{R_2}^{r}\left(r' - \frac{R_1^3}{r'^2}\right)dr'$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{(R_2^3 - R_1^3)}\left(\frac{r'^2}{2} + \frac{R_1^3}{r'}\right)\Bigg|_{R_2}^{r}\right]$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{(R_2^3 - R_1^3)}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} - \frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^3}{R_2}\right)\right]$$

(i) $r < R_1$

$$V(r) = -\left[\int_{\infty}^{R_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'^2}\,dr' + \int_{R_2}^{R_1} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (R_2^3 - R_1^3)}\left(r' - \frac{R_1^3}{r'^2}\right)dr' + \int_{R_1}^{r} 0\,dr\right]$$

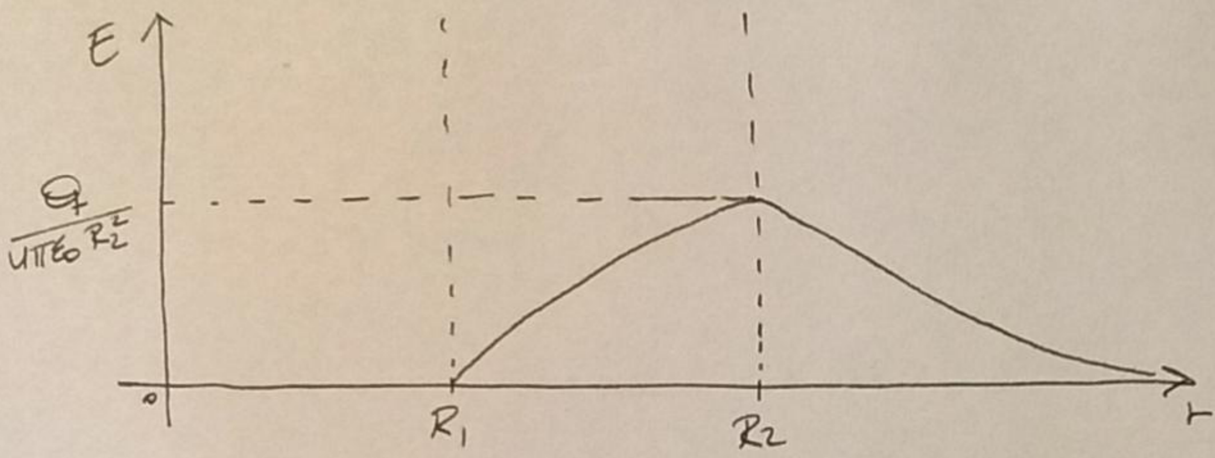
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{(R_2^3 - R_1^3)}\left(\frac{R_1^2}{2} + R_1^2 - \frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^3}{R_2}\right)\right]$$

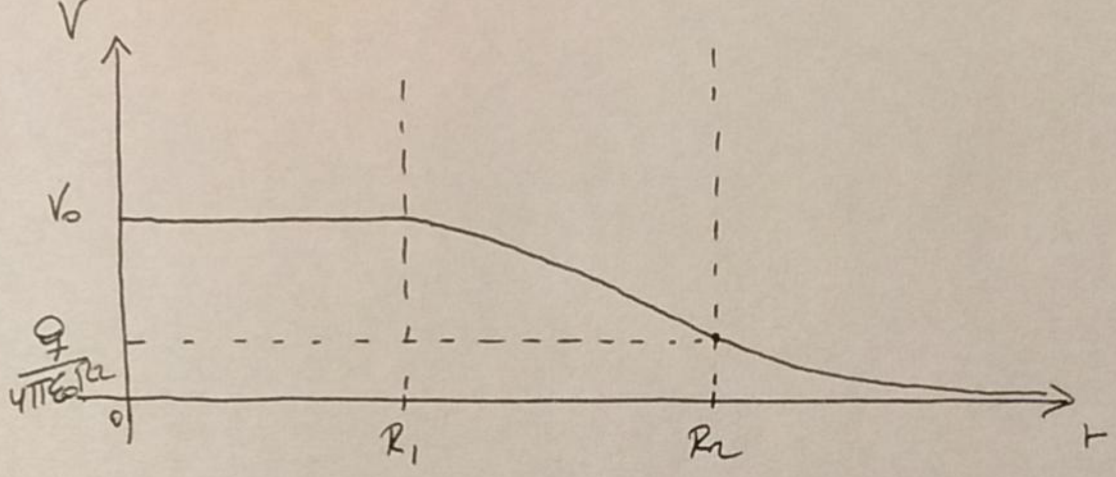
$$= \text{constante} \quad \forall\ r < R_1$$

c) El material con que está hecho el casquete es no conductor, ya que nos dice que la carga q está distribuida sobre todo su volumen.

Gráficas del campo y el potencial para $q>0$ (TEMA 1) y $q<0$ (TEMA 2)

. TEMA 1 : $q>0$





$$V_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{(R_2^3-R_1^3)}\left(\frac{R_1^2}{2}+R_1^2-\frac{R_2^2}{2}-\frac{R_1^3}{R_2}\right)\right]$$