INTRODUCCION A LA TEORIA DE ERRORES

En las ciencias como la Física, es necesaria la contrastación entre resultados teóricos y mediciones experimentales. La **observación** de un fenómeno es el inicio del proceso de búsqueda de la verdad tras los fenómenos físicos. Al observar, surgen naturalmente preguntas, producto de la curiosidad y/o interés del observador: ¿por qué ocurre?, ¿qué factores externos o internos afectan al fenómeno?, ¿de qué manera se desarrolla? Las respuestas a esas y otras preguntas tienen como objetivo formular una **hipótesis**, que intentará explicar con mayor o menor detalle el mecanismo por el cual se producen los fenómenos observados. A continuación, la realización del **experimento** tiene el papel central y fundamental de obtener información cuantitativa mediante mediciones realizadas en un ambiente controlado. En este nivel, la matemática resulta invalorable, ya que permite establecer relaciones entre las variables que se miden, además de que resulta una herramienta indispensable para condensar en pocas líneas (fundamentalmente ecuaciones) lo que se dificulta expresar con el lenguaje propiamente dicho. Como consecuencia del tratamiento matemático de los resultados y la hipótesis surge la **teoría**. Ésta debe explicar claramente las causas del fenómeno observado y permitir obtener resultados teóricos, calculados con la expresión matemática de la teoría.

Como en cualquier actividad humana, la divulgación de ideas y teorías, permite el crecimiento intelectual de la humanidad. A nivel mundial, las teorías deben tener un formato que sea entendible para las distintas entidades y/o personas del ámbito científico y general, de forma tal de que sean divulgadas de forma clara. Para esto existen convenciones respecto a unidades aceptadas, la manera de mostrar la información, etc. Esto es importante por 2 causas: la primera, lograr que el experimento sea reproducible por cualquier persona que quiera verificarlo y/o falsearlo, y la segunda, conseguir que los resultados obtenidos sean la base de futuros trabajos en pos de que la ciencia avance, con el objetivo final de encontrar la verdad subyacente. Teniendo en cuenta esta idea, si la teoría produce resultados que se verifican en una gran cantidad de casos experimentales del mismo fenómeno, mantendrá su carácter de teoría, verificando las hipótesis o supuestos que le dieron origen, es decir, la teoría seguirá teniendo validez mientras los resultados experimentales sigan estando de acuerdo con ella, dentro de un **margen de incerteza**. Si aparece solo un resultado en desacuerdo, la ley deja de ser válida y debe reformularse. De esta forma, el conocimiento avanza, produciendo leyes cada vez más universales, producto de nuevas hipótesis y reformulaciones que surgen a partir de observar el fenómeno.

Resulta evidente que tanto durante la formulación del modelo matemático, como durante la posterior validación de la teoría, el proceso de medición tiene una especial relevancia. Es importante que los instrumentos utilizados sean los adecuados y las técnicas de medición sean llevadas a cabo de forma correcta. Por ello, este apunte tiene como objetivo definir y comprender el proceso de medición y las consecuencias del mismo.

1. Conceptos básicos

1.1. Magnitudes y cantidades

Una **magnitud** es todo atributo que es susceptible de ser medido. Es decir, que puede determinarse cuantitativamente. Por ejemplo, la longitud, la masa, la temperatura y el tiempo son magnitudes. Para cada tipo de magnitud existe un instrumento que la mide; por ejemplo, para medir la longitud de una cuerda utilizamos una regla y no una balanza. El proceso de medición define cual es la magnitud.

La **cantidad** es el resultado de una medición. Es el valor numérico, vectorial o matricial de una magnitud. Una vez determinada la magnitud, se determina una cantidad o número y las unidades correspondientes. La unidad permite comparar nuestro resultado con una medida de referencia universalmente aceptada. Así, se obtiene cuantas fracciones o múltiplos de la unidad de referencia representa la magnitud medida. Si el resultado de una medición es 10 metros, decimos que hemos medido una longitud, la cantidad es 10 y sus unidades son metros (es decir, en la longitud medida caben 10 unidades).

1.2 Apreciación y estimación, precisión y exactitud

La **apreciación** de un instrumento es la mínima división de su escala. Por ejemplo, una regla cuya menor división es 1 mm, tendrá una apreciación de 1 mm. Una balanza en la que el último digito de lectura corresponda a la milésima de kilogramo, es de apreciación 1 gr.

La **estimación** de una lectura es el *menor intervalo que un observador puede medir, interpolando mentalmente entre líneas sucesivas de una escala*. Es decir, el observador puede tener la capacidad de dividir mentalmente la escala en una más pequeña. Esto es posible cuando, por ejemplo, en un instrumento de aguja, el grosor de la misma no sea elevado, o cuando las líneas de escala sean suficientemente finas. Obviamente, en un instrumento de tipo digital, la estimación es imposible, ya que no existen líneas de escala que interpolar.

En muchas oportunidades se utilizan las palabras precisión y exactitud de forma indistinta. Más aún, en algunas normas relativas a instrumentos de medida, se informa el dato de exactitud de un instrumento, cuando en realidad se está informando la precisión. Es necesario clarificar sus significados.

La **exactitud** se enfoca en la localización de los resultados de medición respecto del valor verdadero de la magnitud. Es decir, cuan alejado del valor real se encuentran las mediciones realizadas con determinado instrumento. Esto se asocia a la *calibración* del instrumento. Un instrumento bien calibrado tendrá una exactitud mayor que uno que no lo esté.

La **precisión** está relacionada a la repetitividad de los resultados de mediciones realizadas con un mismo instrumento en condiciones iguales. Es el grado con el cual mediciones sucesivas arrojan idénticos valores.

En resumen, la precisión es la capacidad de un instrumento de dar el mismo resultado en distintas mediciones en las mismas condiciones, y exactitud es la capacidad de un instrumento de dar un valor cercano al valor real de la magnitud medida. En la Figura 1, puede observarse de forma clara la diferencia entre exactitud y precisión. En cada caso, el valor real de la magnitud se encuentra en el centro común de los círculos concéntricos. Cuando los resultados se encuentran cercanos a ese valor y no existe gran dispersión, decimos que la medición es exacta y precisa. Aún cuando una medición sea exacta, es posible que no sea precisa, ya que sucesivas mediciones pueden estar muy dispersas alrededor del valor real de la magnitud. De la misma manera, también existe la posibilidad de que una medición sea precisa, pero no exacta, ya que los valores estarían poco dispersos, pero centrados en un valor diferente al valor real de la magnitud. El peor de los casos surge cuando hay mucha dispersión de medidas, centradas en un valor lejano al valor real.

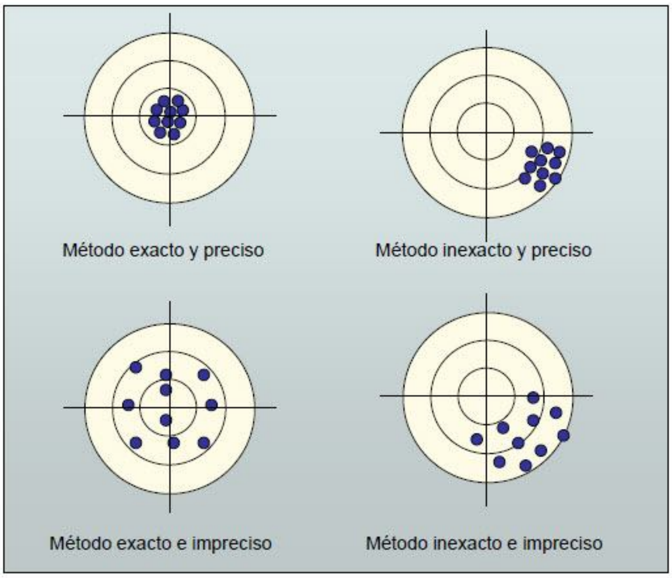

Figura 1. Precisión y exactitud

1.3. El proceso de medición

El proceso de medición es la operación física que permite comparar una cantidad de una magnitud particular con otra previamente definida. A una magnitud física se la dimensiona, utilizando una unidad arbitraria. El proceso de medición involucra a tres sistemas:

- el **objeto** a medir,
- el sistema de medición o **instrumento**, y
- el sistema de comparación o **unidades**

Existen operaciones que el hombre realiza (ya sea operador u observador) que involucran a dichos sistemas:

- **Calibración**: relación entre el instrumento y la unidad adoptada.
- **Medición**: relación entre el instrumento calibrado y el objeto a medir.

El resultado de una medición es un número que se denomina **valor medido**, y tiene 3 características:

- Representa el número de veces o fracciones de entero que el valor medido contiene a la unidad.
- Contiene un símbolo que representa a la unidad.
- Debe incluir **error**, que indica la confiabilidad del resultado.

1.4. Errores en el proceso de medición

Todo proceso de medición tiene limitaciones que provienen de los instrumentos, de la técnica de medición y del observador. Estas limitaciones son las que provocarán que el valor medido sea diferente al valor real o verdadero de la magnitud. Esta diferencia es el resultado de la incerteza propia del acto de medir. Indefectiblemente, todo resultado de una medición tiene un error asociado. ***Es imposible obtener una medición que contenga un error nulo***.

El término error puede resultar confuso debido al uso que le damos en la vida diaria. Normalmente, cuando decimos "error", hacemos referencia a algo equivocado. En ciencias e ingeniería, en cambio, el error está asociado al concepto de *incerteza* (también llamada inexactitud o incertidumbre) en la determinación del resultado de una medición. Por esto es que a veces se dice que *conocer el valor de una magnitud es también conocer su error*. Como la existencia del error es algo inevitable al intentar medir una magnitud, lo mejor que puede hacerse es conocer sus cotas o límites probabilísticos.

¿Cómo se cuantifica el error de una medición? Se utilizan 2 maneras:

- Mediante el denominado ***error absoluto***, correspondiente a la diferencia entre el valor medido X_m y el valor verdadero X_v:

$$E = |X_m - X_v| \qquad (1.1)$$

- Mediante el denominado ***error relativo***, correspondiente al cociente entre el error absoluto y el valor medido X_m:

$$e = \frac{E}{X_m} \qquad (1.2)$$

En muchos casos se utiliza el ***error relativo porcentual***:

$$e\% = e \cdot 100\% = \frac{E}{X_m} \cdot 100\% \qquad (1.3)$$

Definido de esta manera, es posible establecer un límite superior para el error absoluto, si se conocen las fuentes de error y se trabaja con el objetivo de eliminarlas. Para cada experimento, las fuentes de incertidumbre pueden ser diferentes, o alguna tiene mayor preponderancia sobre las otras. Lo que es seguro es que existen. En este punto resulta útil definir el **error nominal** de una medición:

$$E_{nom}^2 = E_{ap}^2 + E_{def}^2 + E_{int}^2 + E_{exact}^2 \qquad (1.4)$$

Observación: el procedimiento de sumar los cuadrados de los errores es un resultado de la estadística, que proviene de suponer que las fuentes de errores son independientes entre sí.

Los términos de la ecuación (1.4) tienen el siguiente significado:

- E_{ap}: es el error de apreciación del instrumento (mínima variación que puede detectar).
- E_{def}: es la incertidumbre asociada a la falta de definición del objeto a medir. A veces el objeto presenta irregularidades en sus propiedades. Lo consideraremos despreciable.
- E_{int}: representa el error del método utilizado para medir y proviene del estudio cuidadoso del mismo.
- E_{exact}: es el error absoluto con el cual el instrumento ha sido calibrado. Lo consideraremos despreciable.

El error nominal de la medición es el error absoluto de la misma.

1.4.1. Calidad de la medición

La calidad de una medición se establece conociendo su error absoluto $\boldsymbol{E}$. Cuando se mide la misma magnitud utilizando 2 instrumentos distintos, es posible comparar sus calidades comparando sus errores absolutos. Por ejemplo, si midiéramos el diámetro de una barra cilíndrica con un calibre y luego con una regla milimetrada, y se obtuviera:

$$\phi_1 = (75{,}54 \ \pm 0{,}02)\ mm \quad \textbf{(calibre)}$$
$$\phi_2 = (75{,}5 \ \pm 0{,}5)\ mm \quad \textbf{(tornillo)}$$

Decimos que la medición 1 es más exacta, ya que su error absoluto es menor. Claramente, el calibre produce resultados de mayor calidad que la regla milimetrada para medir longitudes.

Pero cuando comparamos dos mediciones de una magnitud, pero de diferentes especies, no alcanza con comparar sus errores absolutos. Es por esto que, en estos casos, se utiliza el error relativo como criterio de comparación. Por ejemplo, si midiéramos tanto el diámetro de una barra cilíndrica (con un calibre) y su longitud (con regla milimetrada), podría obtenerse:

$$\phi = (15{,}34\ \pm 0{,}02)\ mm$$
$$L = (697{,}0\ \pm 0{,}5)\ mm$$

Los errores relativos porcentuales en cada caso serían:

$$e_\phi\% = \frac{0{,}02\ mm}{15{,}34\ mm} \cdot 100\% = 0{,}13\%$$
$$e_L\% = \frac{0{,}5\ mm}{697{,}0\ mm} \cdot 100\% = 0{,}07\%$$

Nótese que si bien la medición del diámetro tiene un error absoluto menor, la medición del largo tiene un menor error relativo porcentual, por lo que decimos que la longitud medida con la regla es de mejor calidad que la medición del diámetro hecha con el calibre. Es decir, con el error relativo calculamos la calidad en función de cuál es la magnitud particular que estamos midiendo.

Si se utilizara el calibre para medir la longitud y la regla milimetrada para medir el diámetro, se obtendrían los siguientes resultados:

$$\phi = (15{,}34\ \pm 0{,}5)\ mm$$
$$L = (697{,}0\ \pm 0{,}02)\ mm$$

Por lo que los errores relativos porcentuales serán:

$$e_\phi\% = \frac{0{,}5\ mm}{15{,}34\ mm} \cdot 100\% = 3{,}26\%$$
$$e_L\% = \frac{0{,}02\ mm}{697{,}0\ mm} \cdot 100\% = 0{,}003\%$$

Estos resultados indican que es mucho mejor medir el diámetro con el calibre que con la regla milimetrada, dado que el valor del error relativo porcentual disminuye de 3,26% a 0,13%

1.5. Resultado de una medición

Formalmente, el resultado de una medición se expresa de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{X = X_m \pm E \qquad [U]}$$

donde:

$\boldsymbol{X}$: cantidad de la magnitud que se desea conocer

$\boldsymbol{X_m}$: valor representativo de la medición (valor medido)

$\boldsymbol{E}$: error absoluto o incerteza (exactitud con la que el valor se conoce)

$\boldsymbol{[U]}$: unidad de medida empleada

1.5.1. Intervalo de incerteza

El valor del error absoluto establece un **intervalo de incerteza**, cuyo valor es el doble del error absoluto. El valor de la magnitud que se pretende conocer se encontrará (seguramente) en el intervalo de incerteza de ancho 2E, centrado en X_m (Fig. 2). En realidad, estrictamente, *se dice que existe una probabilidad "p" de que el valor teórico de X se encuentre dentro del intervalo de incerteza.*

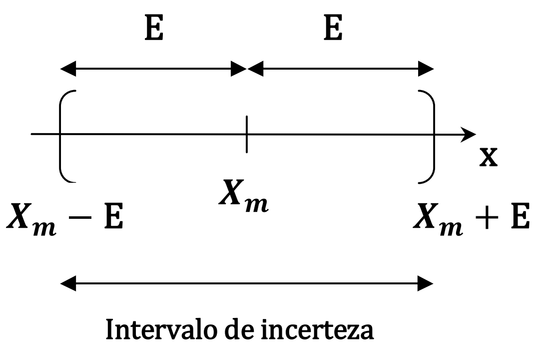

Figura 2. Representación del valor medido y su error.

Cuando se hizo referencia al método científico, se dijo que cualquier teoría seguiría teniendo validez mientras los resultados experimentales sigan estando de acuerdo con ella, dentro de un **margen de incerteza.** Justamente, el margen de incerteza es el intervalo de incerteza al que nos referimos.

1.6. Clasificación de errores de medición

Existen dos tipos de clasificación de errores: según su naturaleza y según su origen.

Según su naturaleza, podemos clasificarlos en:

- **<u>Errores groseros o fallas</u>:**
  Provienen de equivocaciones del operador durante el proceso de medición. Por ejemplo, no poner en escala cero (o tarar) una balanza, perder la atención al contar número de vueltas de un movimiento circular, anotar de forma incorrecta los resultados de medición (invertir números, etc.). Son evitables, poniendo atención y siendo cuidadosos al medir.
- **<u>Errores sistemáticos</u>:**
  Están relacionados al procedimiento mismo de medición, y deben ser analizados conociendo dicho proceso. Por ejemplo, un instrumento descalibrado medirá siempre con un error de igual signo, y por consiguiente, nunca podrá ser eliminado. La única forma de eliminarlo es calibrar el instrumento con un patrón.
- **<u>Errores accidentales, aleatorio o casuales</u>:**
  A diferencia de los errores anteriores, éstos responden a factores que son indetectables e independientes, y dan lugar a pequeñas desviaciones positivas y negativas. No pueden predecirse

ni evitarse, existen y es necesario realizar un tratamiento estadístico sobre estos errores, para poder acotarlos. Este tipo de errores serán tratados más adelante.

Según su origen, podemos clasificar los errores en:

- **Errores del observador**

  Cada observador tiene su forma particular de observar un fenómeno o de leer los instrumentos. Por ejemplo, al operar un cronómetro, el operador puede tener tendencia a disparar el cronómetro antes o después del instante de referencia. Esto es inherente a cualquier operador, y es posible entrenar para disminuir este tipo de errores. Si la tendencia no existiera, es decir, la tendencia a disparar antes o después es la misma, dichos errores se eliminan porque son de signos diferentes. Otro ejemplo lo constituye la incorrecta posición del observador frente al instrumento al medir una longitud (no estar perfectamente alineado con la escala).

- **Errores del instrumento**

  Dependen específicamente del instrumento utilizado, de su correcto funcionamiento y calidad, etc. Algunos tipos de errores de instrumento son:

  - **Defecto de construcción o corrimiento de escala:**

    Cuando los instrumentos son de dudosa calidad, es posible que la escala no esté centrada en el cero. Aún cuando un instrumento sea de buena calidad y utilizado de forma correcta, puede ocurrir dicho corrimiento, que puede solucionarse calibrándolo. La calibración de un instrumento es muy importante, ya que en dicho proceso se compara el valor que dicho instrumento mide ($\boldsymbol{X_m}$) con el valor verdadero ($\boldsymbol{X_v}$). Así es posible determinar el error propio del instrumento.

    $$\boldsymbol{E_i = X_m - X_v}$$

    Pero el valor real ($\boldsymbol{X_v}$) es inalcanzable, por razones físicas que escapan al alcance de este curso (principio de incertidumbre), por lo tanto, no existe. Ya que $\boldsymbol{X_v}$ no puede conocerse, el mejor valor que puede alcanzarse proviene del instrumento más refinado, utilizado siguiendo la mejor técnica, al cual llamaremos $\boldsymbol{X_{vc}}$ (valor verdadero convencional), y que asumiremos que tiene una incerteza despreciable.

    Por lo tanto, la calibración de un instrumento se realizará comparando el valor medido por dicho instrumento con el valor verdadero convencional:

    $$\boldsymbol{E_i = X_m - X_{vc}}$$

El valor de $\boldsymbol{X_{vc}}$ se obtiene mediante instrumentos denominados “patrón”, y la calibración debe realizarse periódicamente para que los instrumentos produzcan lecturas confiables a lo largo del tiempo.

El error del instrumento será entonces una corrección que se impone a las lecturas (se suma o se resta a la lectura obtenida). Por ejemplo, la calibración de una balanza se realiza comparando el valor conocido de pesas patrón con el valor que la balanza mide, pudiendo de esta forma determinarse la desviación (positiva o negativa). Esta desviación será la que deba sumarse o restarse a las mediciones de la balanza, siempre y cuando no sea posible ajustar mecánicamente la misma para que dicha desviación desaparezca.

- **Defecto de construcción o desgaste:**
  Todos los instrumentos poseen defectos (ningún instrumento es perfecto). Además, se produce descalibración debido al mal uso del instrumento (golpes, calentamiento de metales). En general, este tipo de errores son difíciles de detectar, y es posible acotarlos mediante el correcto mantenimiento del aparato (por ejemplo, periódicas comparaciones con patrones y calibración).

- **Limitaciones propias del sistema de lectura:**
  Espesor de las líneas de la escala, grosor de la aguja, separación entre líneas de escala de un instrumento analógico, etc.

- **<u>Errores debido al modelo físico elegido o a aproximaciones en las teorías físicas</u>**
  Al momento de proponer un modelo físico, en muchos casos se realizan simplificaciones prácticas, con el fin de obtener un modelo matemático simple. Por ejemplo, para determinar el valor de la aceleración de la gravedad a partir de la medición del período de un péndulo simple, se utiliza la siguiente fórmula:

$$g = L\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

  Esta fórmula es válida para un péndulo ideal (cuya masa se considera puntual y la masa del hilo es despreciable) y oscilaciones pequeñas. Si aplicamos esta fórmula con valores de período medidos en un péndulo físico (no ideal), estaremos introduciendo errores. La manera de disminuir el error en este caso será acercar a la experiencia lo máximo posible al caso ideal.

- **<u>Errores del propio acto de medición</u>:**
  El acto de observación altera el fenómeno que se estudia. Por ejemplo, cuando se mide la presión de un neumático con un manómetro, se libera algo de aire, alterando la presión a medir.

- **Errores producidos por condiciones externas**
  Por ejemplo, al utilizar una balanza de platillos, se compara el peso de un cuerpo con el de pesas patrón, que generalmente tienen diferente volumen que el cuerpo. Es decir, el cuerpo y las pesas están sometidos a un empuje diferente del aire. Otro ejemplo puede ser la medición de la temperatura de un líquido con un termómetro. La propia temperatura del termómetro modifica la del líquido que se encuentra inmediatamente a su alrededor. Existe calor que se transfiere entre el instrumento y el sistema que se está estudiando a través de la medición, cambiando la temperatura del líquido. Esto provocará incerteza.

Para finalizar, todos los errores antes nombrados, deben ser identificados y evaluados para reducir la incerteza o error que producen en las mediciones que se llevan a cabo.

2. Mediciones directas e indirectas

Una *medición directa* es el caso más simple de medición. Es la lectura de cierta cantidad de una magnitud física mediante un instrumento. Son ejemplos de ella: medir la masa de un objeto en una balanza, registrar un intervalo de tiempo con un cronómetro, determinar la corriente eléctrica con un amperímetro. En este tipo de medición se intenta obtener el valor de una magnitud y su incerteza o error absoluto, mediante una única lectura de la misma.

Una *medición indirecta* es aquella que se realiza utilizado relaciones matemáticas entre otras magnitudes que pueden medirse directamente. Por ejemplo, para medir la velocidad media de un móvil durante un determinado período de tiempo, debe realizarse el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo que tardó en recorrerla. Si las mediciones directas de la distancia y del tiempo tienen errores, estos se verán reflejados en el error que tendrá el valor de velocidad medido de forma indirecta.

2.1. Errores en una medición directa

¿Cómo se establece la incerteza en una medición directa? No puede generalizarse un criterio, cada medición tendrá sus características que ayudaran a establecerlo. El objetivo siempre será acotar el error, es decir, disminuirlo lo máximo posible. Aún así, como ya se dijo, no se espera que el error sea nulo, ya que esto resulta imposible.

En general, el error final de una medición directa estará dado según la ecuación (1.4) (despreciando los términos E_{def}, E_{int} y E_{exact}) por la apreciación del instrumento (E_{ap}), es decir:

$$E_{nom}^2 = E_{ap}^2$$

En algunos casos en particular, el método de medición puede sumar un error que no es despreciable frente al de apreciación. Entonces debe agregarse el error de interacción (E_{int}):

$$E_{nom}^2 = E_{ap}^2 + E_{int}^2$$

Veamos algunos ejemplos específicos:

- Si se mide con una regla milimetrada o calibre, el error de la medición será directamente el error del instrumento (regla=1 mm, calibre=0,02 mm).
- Si se mide el período de un péndulo con un cronómetro digital (de apreciación 0,01 s), disparado por un observador de forma manual, también debe tenerse en cuenta el error del observador (0,1-0,2 s). El error será entonces la suma de la apreciación del cronómetro y el error del operador. Nótese que el error de apreciación del instrumento es 10 veces menor que el del operador, por lo que puede ser considerado despreciable. En el caso de que la medición se realice sin intervención humana (fotodiodo de apreciación 0,0001 s), el error será simplemente el error del instrumento.

2.1.1. Ejemplo de medición directa

Se requiere medir una varilla con una regla de apreciación 1 mm. Al realizar la medición, se obtiene (Fig. 3):

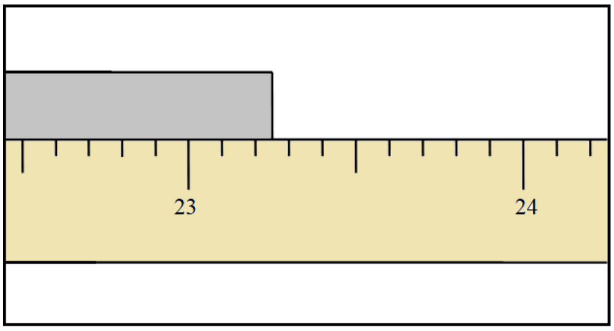

Figura 3. Medición de longitud

Se observa que el extremo de la varilla se encuentra entre 23,2 cm y 23,3 cm:

$$232\ mm < L_m < 233\ mm$$

Y puede expresarse la medición como:

$$L_m = (232{,}5 \pm 0{,}5)mm$$

En este caso, se dice que:

- Se estima media división.
- El intervalo de incerteza coincide con la apreciación del instrumento.
- El error absoluto es de 0,5 mm.

Si se recurre a una lupa para efectuar la lectura (Fig. 4), podría observarse:

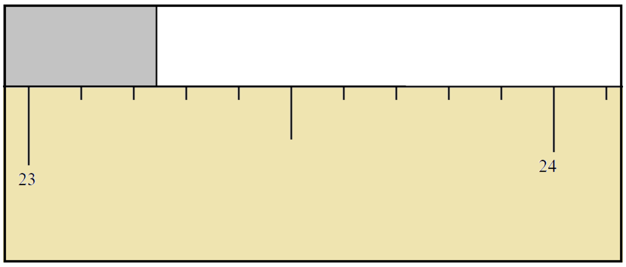

Figura 4. Medición de longitud con lupa

Es posible afirmar que $232{,}3\ mm < L_m < 233{,}5\ mm$, y se indica:

$$L_m = (232{,}4 \pm 0{,}1)mm$$

En este caso:

- Se estima 1/10 de división.
- El intervalo de incerteza es de 0,2 mm.
- El error absoluto es de 0,1 mm.

2.2. Errores en una medición indirecta: propagación de errores

Cuando se miden magnitudes de forma indirecta, el error de las magnitudes medidas directamente se transmite al aplicar la fórmula matemática que las relaciona. Este fenómeno se denomina propagación de errores.

Sea L una magnitud que depende de otras (*X*,*Y*,*Z*) que pueden medirse directamente, tal que:

$$L = f(X, Y, Z) = L(X, Y, Z)$$

Cada una de las variables X,Y y Z tiene su propio error:

$$X = X_m \pm E_X \quad \rightarrow \quad E_X = \Delta X$$
$$Y = Y_m \pm E_Y \quad \rightarrow \quad E_Y = \Delta Y$$
$$Z = Z_m \pm E_Z \quad \rightarrow \quad E_Z = \Delta Z$$

El problema a resolver es determinar cómo los errores de X, Y y Z afectan al error de L. Para ello es necesario expandir la función $L = L(X, Y, Z)$ mediante una serie de Taylor (se deprecian los términos de orden igual o superior a 2):

$$L = L(X_0, Y_0, Z_0) + \left(\frac{\partial L}{\partial X}\right)\Bigg|_{X_0,Y_0,Z_0} (X - X_0) + \left(\frac{\partial L}{\partial Y}\right)\Bigg|_{X_0,Y_0,Z_0} (Y - Y_0) + \left(\frac{\partial L}{\partial Z}\right)\Bigg|_{X_0,Y_0,Z_0} (Z - Z_0)$$

donde las derivadas están evaluadas en los valores (X_0, Y_0, Z_0), alrededor de los cuales se expande la función $L(X, Y, Z)$.

Si se toma que:

$$(X - X_0) = (X - X_m) = E_X$$
$$(Y - Y_0) = (Y - Y_m) = E_Y$$
$$(Z - Z_0) = (Z - Z_m) = E_Z$$

La expresión queda:

$$E_L = L - L_m = \left|\frac{\partial L}{\partial X}\ E_X\right| + \left|\frac{\partial L}{\partial Y}\ E_Y\right| + \left|\frac{\partial L}{\partial Z}\ E_Z\right|$$

Es importante recordar que las derivadas parciales están evaluadas en los valores medidos (X_m, Y_m, Z_m). El error obtenido con la ecuación es el máximo error posible.

El resultado obtenido es el error para una medición indirecta:

$$E^2 = E_{int}^2 = E_L^2$$

3. Cifras significativas y truncamiento

Los científicos e ingenieros procuran que los datos experimentales no digan más de lo que pueden asegurar. Para esto, se debe tener cuidado con el número de cifras con el que se presentan los resultados de una medición. Por ejemplo, cuando se realiza una medición con una regla graduada en milímetros, está claro que, si se es cuidadoso, es posible asegurar el resultado hasta la cifra de los milímetros o, en el mejor de los casos, con una fracción del milímetro, pero no más. De este modo, el resultado podría ser $L = (95{,}2 \pm 0{,}5)$ mm, o bien $L = (95 \pm 1)$ mm. En el primer caso, se dice que la medición tiene tres **cifras significativas** y en el segundo caso solo dos. El número de cifras significativas es igual al número de dígitos contenidos en el resultado de la medición que están a la izquierda del primer dígito afectado por el error, incluyendo este dígito. El primer dígito, o sea el que está más a la izquierda, es el más significativo (9 en el ejemplo) y el último (más a la derecha) el menos significativo, ya que es en el que tenemos "menos seguridad". Nótese que no tiene sentido incluir en el resultado de L más cifras que aquellas en donde se tiene incertidumbres (donde "cae" el error).

No es correcto expresar el resultado como $L = (95{,}321 \pm 1)$ mm, ya que si se tiene incertidumbre del orden de 1 mm, mal se puede asegurar el valor de las décimas, centésimas y milésimas de milímetro.

En resumen, una cifra es significativa cuando se la conoce con una exactitud aceptable (es decir, cuando se es capaz de medirla y asegurar su valor).

Dependiendo del instrumento utilizado y su apreciación, puede definirse la relación entre cifras significativas y la posición de la coma decimal. Debe haber simple coincidencia entre la última cifra significativa del error y la del valor medido. Si no existe coincidencia, debe *truncarse* el valor medido, para que coincida la cantidad de decimales del valor medido con el del error. Supongamos que se tiene un termómetro de apreciación 0,1 ºC. Al igual que el ejemplo de longitud del párrafo anterior, no tiene sentido afirmar que al medir con ese termómetro se registró una temperatura $T = (34{,}175 \pm 0{,}1)$ ºC. La cantidad de decimales después de la coma está relacionada con la apreciación del instrumento, ya que el termómetro no puede medir intervalos menores a 0,1 ºC. O dicho de otra manera, la cantidad de decimales del error y la magnitud medida debe ser la misma. Como no es posible agregar decimales a la apreciación del instrumento (ya que sería incorrecto atribuirle una apreciación que no tiene), debe truncarse el valor medido. Cuando se requiere truncar o acotar la parte decimal de un número, hay que ver el número a la derecha del último dígito que consideraremos significativo. Si éste es mayor o igual a 5, entonces se redondea incrementando en uno el último dígito que consideraremos significativo. Si es menor a 5, el último digito significativo permanecerá sin cambio. Para el caso de la medición de temperatura anteriormente mencionada, $T = (34{,}2 \pm 0{,}1)$ ºC. Siempre la cantidad de decimales dependerá del instrumento utilizado para medir.

Los cambios de unidades también representan fuentes de ambigüedad en cuanto a cifras significativas. El número de cifras significativas de un resultado es el mismo cualquiera sea la unidad en la que se exprese.

Dada una cantidad, ¿cuales son cifras significativas?:

a) **Los ceros a la izquierda** no son cifras significativas. Cuando los ceros aparecen como primeras cifras de un resultado, no se consideran cifras significativas, ya que solo indican el orden de magnitud de la unidad que acompaña al mismo.

> Ejemplo: la longitud "d" de un objeto es medida con una regla de apreciación 1 mm, el resultado es 3,2 mm. Este valor tiene 2 cifras significativas. Ahora, si se desea expresar el resultado en metros, entonces
>
> $$d = 3{,}2\ cm = 0{,}032\ m$$
>
> Y el resultado sigue teniendo 2 cifras significativas. Muchas veces se acostumbra a escribirlo recurriendo a potencias de 10:
>
> $$d = 3{,}2\ \times 10^{-2} m$$

b) **Ceros a la derecha**: cuando los ceros aparecen como últimas cifras significativas, ello no implica que deban ser considerados cifras significativas:

i) Significativos: cuando los ceros figuran como parte verdadera de la medición.

> **Ejemplo**: no es lo mismo escribir que algo pesa 1 kg (1 c.s.), que anotar que pesa 1,00 kg (3 c.s.) . La primera magnitud implica haber realizado la medición con una balanza que aprecia kilogramos. Para la segunda medición se utilizó una balanza graduada en centésimos de kilogramos. La segunda medición es 10 veces más exacta que la primera.

ii) No significativos: cuando los ceros figuran como últimas cifras significativas, su única función es especificar la posición del punto decimal.

> **Ejemplo**: el valor estándar de la velocidad de la luz es c=300000000 m/s. Es razonable sospechar que este valor no tenga 9 cifras significativas, ya que esto significaría conocer la velocidad de la luz con una exactitud del orden de 1 m/s. Así escrito, es imposible determinar la cantidad de cifras significativas. Puede evitarse esta ambigüedad, escribiendo $3{,}00 \times 10^{8}$ m/s, y ahora sí se puede asegurar que las cifras significativas son 3.

3.1. Cifras significativas en operaciones aritméticas

Cuando se dispone de una calculadora electrónica, parece correcto o más exacto escribir los resultados con tantas cifras decimales como aparecen en la pantalla, pero esto carece de sentido la mayoría de las veces.

Para expresar correctamente los resultados de operaciones aritméticas, mediante cifras significativas, es necesario tener en cuenta que ***dicho resultado no puede tener más decimales que el número de menor cantidad de decimales involucrado en la operación***.

REFERENCIAS

- *Introducción a la Teoría de Errores de Medición*, Dra. E. Gonzalez, Dra. P. Jasen – Cátedra de Física I (UNS).
- *Errores de medición* – Dr. Mario Sandoval – Cátedra de Física I (UNS)

Anexo cifras significativas

En el apunte de Introducción a la Teoría de Errores, se definieron las llamadas cifras significativas, y la "reglas" para determinar cuáles cifras de un número son significativas. Esto es aplicable a cualquier número en general. En el caso particular de mediciones, esto tiene importancia, debido a los resultados de una medición deben ser realista y fundamentalmente estar de acuerdo con el instrumento utilizado. El resultado no puede indicar mayor precisión que la que el instrumento puede alcanzar.

¿Qué ocurre cuando determinamos una magnitud de forma indirecta? Claramente, el valor medido surge de la aplicación de una fórmula matemática que relaciona las variables medidas directamente, con la magnitud de interés. El resultado calculado puede tener una gran cantidad de decimales, y no es correcto presentar los resultados de esa forma. Lo mismo ocurre cuando se calcula el error o intervalo de incerteza de una magnitud medida de forma indirecta, utilizando la definición:

$$E_L = \left|\frac{\partial L}{\partial X}\, E_X\right| + \left|\frac{\partial L}{\partial Y}\, E_Y\right| + \left|\frac{\partial L}{\partial Z}\, E_Z\right|$$

En este caso, al igual que en el cálculo del valor medido de una medición indirecta, el resultado puede calcularse con gran cantidad de decimales, situación incompatible con resultados claros.

Para evitar este tipo de problemas, se suelen expresar las incertidumbres o incertezas *con dos cifras significativas*, y solo en casos excepcionales y cuando existe fundamento para ello, es posible usar más. También es usual considerar que la incertidumbre en un resultado de medición afecta solo a la última cifra si es que no se la indica explícitamente. Por ejemplo, si un cronómetro muestra como resultado hasta la centésima de segundo, es razonable suponer que el error es del orden de la centésima de segundo (0,01 seg).

Veamos esto con un ejemplo:

Medición indirecta del volumen de un cilindro

Se mide la altura y el diámetro del cilindro, arrojando los siguientes resultados:

Altura (mm), L	Diámetro (mm), D
$24{,}32\ \pm 0{,}02$	$7{,}05\ \pm 0{,}05$

Donde se tuvo en cuenta solo la apreciación del instrumento (E_{ap}) para determinar el error directo, es decir, se supone que no hay errores groseros, y el único error de tipo sistemático corresponde al instrumento.

El volumen del cilindro se determina mediante la siguiente ecuación, utilizando los valores medidos de diámetro y altura:

$$V_{CIL} = \frac{\pi}{4} D^2 L = \frac{\pi}{4}(7{,}05\ mm)^2(24{,}32\ mm) = 949{,}361653899483\ mm^3$$

Resulta evidente que si bien el resultado del cálculo tiene gran cantidad de decimales, el resultado debe truncarse, pero… ¿cómo?

En primer lugar, los valores de altura y diámetro tienen 2 decimales, así que es razonable que el resultado de V_{CIL} tenga la misma cantidad de decimales:

$$V_{CIL} = 949{,}36\ mm^3$$

¿Qué ocurre con el error de V_{CIL}? Para calcularlo, utilizamos la definición, para lo cual debemos calcular las derivadas parciales respecto de cada variable de la que dependa:

$$\frac{\partial V_{CIL}}{\partial L} = \frac{\pi}{4} D^2 \quad , \quad \frac{\partial V_{CIL}}{\partial D} = \frac{\pi}{2} DL$$

$$E_{V_{CIL}} = \left| \frac{\partial V_{CIL}}{\partial L} \right|_{L_m, D_m} . E_L \Bigg| + \left| \frac{\partial V_{CIL}}{\partial D} \right|_{L_m, D_m} . E_D \Bigg|$$

$$E_{V_{CIL}} = \left| \frac{\pi}{4} D_m^2 . E_L \right| + \left| \frac{\pi}{2} D_m L_m . E_D \right|$$

$$E_{V_{CIL}} = \left| \frac{\pi}{4} (7{,}05\ mm)^2 (0{,}02\ mm) \right| + \left| \frac{\pi}{2} (7{,}05\ mm)(24{,}32\ mm).(0{,}05\ mm) \right|$$

$$E_{V_{CIL}} = 0{,}78\ mm^3 + 13{,}47\ mm^3$$

$$E_{V_{CIL}} = 14{,}24\ mm^3$$

Como resultado, se obtendría:

$$V_{CIL} = (949{,}36 \pm 14{,}24)\ mm^3$$

El error relativo porcentual será:

$$e_{\%} = \frac{14{,}24\ mm^3}{949{,}36\ mm^3} . 100\% = 1{,}5\%$$

El error absoluto ($E_{V_{CIL}}$) tiene 4 cifras significativas.

Pero como se dijo antes, es usual utilizar sólo 2 cifras significativas. Para este caso en particular, corresponde que:

$$E_{V_{CIL}} = 14\ mm^3$$

Ahora, el valor de volumen medido indirectamente debe adecuarse al valor del error (truncamiento), obteniéndose:

$$V_{CIL} = (949 \pm 14)\ mm^3$$

Si se calcula nuevamente el error relativo, se obtiene:

$$e_{\%} = \frac{14\ mm^3}{949\ mm^3}\ .\ 100\% = 1{,}48\%$$

Es decir, el error relativo no se ve afectado de forma importante si escribimos el error con dos cifras significativas y adecuamos el valor medido. No tiene sentido práctico hacerlo con más. ¿Por qué? Volvamos al concepto de error: "determina un intervalo de incerteza centrado en el valor medido".

En el resultado con 4 cifras significativas, la primera cifra significativa (1) nos da un ancho del intervalo de incerteza del orden de diez unidades, la segunda (4) le agrega cuatro unidades, la tercera (2) aumenta el intervalo de incerteza en dos décimas (o dos centésimas de la primera cifra significativa), y la cuarta (4) aumenta el intervalo de incerteza en cuatro centésimas (o cuatro milésimas de la primera cifra significativa), lo que es despreciable frente a las 10 unidades. Es por esto que usualmente se utilizan dos cifras significativas, ya que dichas cifras por sí solas, ya establecen la mayor parte del intervalo de incerteza.

Para finalizar, puede decirse que para la medición realizada, el volumen se ha determinado con 3 cifras significativas, ya que **el número de cifras significativas de la medición es el mayor número de cifras significativas entre el valor medido y el error absoluto**:

$$V_{CIL} = (949 \pm 14)\ mm^3$$