# TRAZADO DE LÍNEAS EQUIPOTENCIALES

**Nota**: ***Traer, por comisión un pendrive o cualquier otro tipo de dispositivo estándar de almacenamiento de datos.***

**Objetivo:**

El objetivo de este trabajo es determinar en forma experimental las líneas equipotenciales, es decir, el lugar geométrico donde el potencial eléctrico toma el mismo valor, en una dada configuración de conductores en equilibrio electrostático y comparar dicho resultado con los predicho por la teoría.

Los resultados teóricos se obtendrán aplicando el ***método numérico de relajación*** para resolver de la Ecuación de Laplace con las condiciones de borde equivalentes a la configuración de conductores analizada en forma experimental.

**Introducción Teórica al Método Experimental:**

En el vacío y sin presencia de cargas libres, el potencial electrostático $\Phi$ verifica la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2\Phi = 0 \qquad [1]$$

y está relacionado con el campo electrostático por:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\boldsymbol{Grad}\ \Phi = -\vec{\nabla}\Phi \qquad [2]$$

Para conocer la función potencial $\Phi = \Phi(x, y, z)$ en una región determinada del espacio se debe resolver la ecuación de la Laplace [1]:

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \qquad [3]$$

teniendo en cuenta las condiciones de borde del problema. Estas condiciones pueden hacer sumamente dificultosa, o imposible, la resolución analítica del problema, por lo que se deben usar métodos analógicos o numéricos.

Resolver un problema por un método analógico significa trasladarlo a otro sistema que responda formalmente a las mismas ecuaciones, pero cuya resolución práctica sea sencilla. En nuestro caso consideraremos la distribución del potencial en un medio conductor con una distribución de corrientes estacionarias.

Según la ecuación de continuidad la densidad de corriente, $\vec{J}$, para corrientes estacionarias, se reduce a:

$$\boldsymbol{Div}\,\vec{J} = \vec{\nabla}.\vec{J} = 0 \qquad [4]$$

Para un medio conductor que responde a la ley de Ohm, la densidad de corriente es proporcional al campo eléctrico $\vec{E}$ :

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \qquad [5]$$

Donde σ es la conductividad del medio.

Según la ecuación de continuidad, [4], el campo eléctrico en el conductor es tal que:

$$\vec{\nabla}\left(\sigma \vec{\boldsymbol{E}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\nabla}\vec{\boldsymbol{E}} = 0} \qquad [6]$$

Dado que el campo eléctrico se puede determinar a partir del potencial eléctrico $\left(\int_C \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0\right)$,

$$\boldsymbol{E} = -\vec{\nabla}\Phi \qquad [7]$$

Reemplazando (7) en (6)

$$\nabla^2 \Phi = 0 \qquad [8]$$

Así resulta que, el potencial en un problema de corrientes estacionarias en un conductor también debe cumplir la ecuación de Laplace, ya que la ecuación [8] es idéntica a la [1].

Podemos establecer, entonces, una analogía entre las líneas de campo electrostático $\vec{E}$ en un problema de conductores en un medio dieléctrico y las líneas de densidad de corriente $\vec{J}$ ; en un medio conductor ohmnico a través del cual se establece una diferencia de potencial. Esto a su vez se traduce en una analogía entre el potencial electrostático y el potencial en el material conductor.

**<u>Procedimiento Experimental</u>**

De acuerdo a la analogía establecida, se trabajará sobre un papel conductor de alta resistividad (papel con una película de grafito), sobre el que estará diagramada, con pintura metálica, la configuración de conductores a analizar (placas, esferas, etc...). Las regiones pintadas son conductoras, presentando una conductividad mucho mayor que la del grafito, por lo cual se pueden aproximar a superficies equipotenciales. Dicho de otro modo, representan a los conductores que establecerán parte de las condiciones de borde del problema (condiciones de Dirichlet). La distribución de líneas equipotenciales también estará determinada por los límites de papel de grafito, ya que en dichos bordes deben cumplirse las condiciones de contorno de “Neumann”, según las cuales la componente perpendicular del campo eléctrico en el borde debe anularse.

1. Se dispondrá el papel grafitado con la distribución de conductores sobre la mesada y se conectará cada electrodo de una fuente de tensión a los conductores de acuerdo a la configuración que se desea analizar (a escala con el problema real). El voltaje de la fuente se establecerá en un valor entre 10 a 20[V]. *obs: Verificar con un tester la tensión de la fuente.*

2. Una vez conectados los conductores a la fuente se impondrá entre éstos una diferencia de potencial. El circuito se completará a través del papel conductor, estableciéndose, a través del mismo, líneas de corriente y caídas de potencial, las que satisfacen la ecuación de Laplace.

3. A fin de sistematizar la exploración de la superficie de grafito, sobre ésta se dibujará, con lápiz negro (grafito), una grilla de puntos equiespaciados 1.0[cm] entre sí, como máximo. La idea es medir el potencial en cada punto de la grilla, sobre toda la supeficie.

4. La diferencia de potencial (voltaje) se medirá con un tester. Para esto se conectará la entrada "com" del tester (la tierra) a uno de los conductores y la otra entrada se conectará una "punta de prueba". Con la punta de prueba se explorará la hoja de grafito se medirá la diferencia de potencial entre el punto explorado y el conductor de referencia. El valor de potencial indicado por el tester se anotará en una tabla.

5. Los valores tabulados se llevarán a una planilla de datos y se graficará la distribución espacial de diferencia potencial (gráfico de superficie).

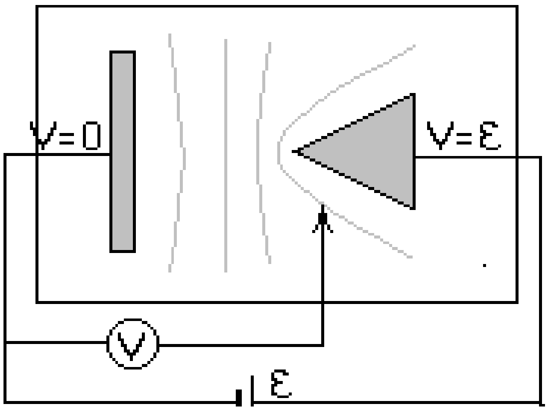

Figura 1

6. ¿cómo son las líneas equipotenciales en cercanías de los conductores? ¿y cerca de los bordes del papel de grafito?

7. Dibuje las líneas de campo eléctrico, ¿cómo son estas en cercanía de los conductores? Y cerca de los bordes del papel?

## **Introducción teórica al Método de Relajación.**

Para resolver el problema en forma numérica, consideraremos al plano (continuo) como un conjunto discreto de puntos separados una distancia $\Delta x = \Delta y = d$ uno de otro. Trabajando con incrementos finitos en lugar de diferenciales (esto se puede hacer si los $\Delta x,\ \ \Delta y$ son pequeños comparado con las dimensiones de la región a analizar), la derivada primera del potencial respecto de cada coordenada se puede aproximar de la siguiente forma,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cong \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} \qquad y \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cong \frac{\Delta \Phi}{\Delta y} \qquad [9]$$

Procediendo de igual forma para calcular la derivada segunda, se llega a que,

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \cong \frac{\Delta\left(\Delta\Phi/\Delta x\right)}{\Delta x} \qquad y \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \cong \frac{\Delta\left(\Delta\Phi/\Delta y\right)}{\Delta y} \qquad [10]$$

Si $\Phi_0$ es el potencial del punto central 0, y $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4..etc.$ son los potenciales de los puntos ($x_1$,$y_1$); ($x_2$,$y_2$); ($x_3$,$y_3$); ($x_4$,$y_4$); etc. representados en la figura 2,

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{x=x_1} \cong \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{\Phi_0 - \Phi_{1'}}{2d}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_{y=y_3} \cong \frac{\Delta\Phi}{\Delta y} = \frac{\Phi_0 - \Phi_{3'}}{2d}$$

y así para los puntos $x_2$ y $y_4$

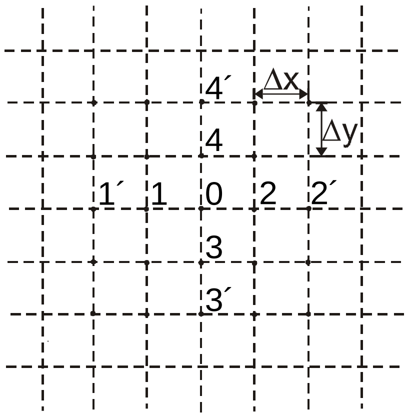


Figura 2

Luego la derivada segunda del potencial se puede determinar a partir del potencial en los puntos ($x_1$,$y_1$); ($x_2$,$y_2$); ($x_3$,$y_3$); ($x_4$,$y_4$).

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \cong \frac{\frac{\Phi_{2'} - \Phi_0}{2d} - \frac{\Phi_0 - \Phi_{1'}}{2d}}{2d}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \cong \frac{\frac{\Phi_{4'} - \Phi_0}{2d} - \frac{\Phi_0 - \Phi_{3'}}{2d}}{2d}$$

La evaluación de la Ecuación de Laplace, [3], en el punto central ($x_0$,$y_0$) de acuerdo a esta aproximación, resulta ser:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\frac{\Phi_{2'} - \Phi_0}{2d} - \frac{\Phi_0 - \Phi_{1'}}{2d}}{2d} + \frac{\frac{\Phi_{4'} - \Phi_0}{2d} - \frac{\Phi_0 - \Phi_{3'}}{2d}}{2d} = 0 \qquad [11]$$

o sea:

$$\Phi_o = \frac{\Phi_{1'} + \Phi_{2'} + \Phi_{3'} + \Phi_{4'}}{4} \qquad [12]$$

Lo que nos dice que el potencial en cualquier punto debe ser igual al promedio de los potenciales de los puntos próximos separados a distancias 2d. Como la elección de d es arbitraria (lo suficientemente pequeña para que la aproximación por incrementos finitos sea válida), entonces, es conveniente para el cálculo considerar a los cuatro vecinos más próximos:

$$\Phi_o = \frac{\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4}{4} \qquad [13]$$

Esto significa que si la función Φ(x,y) satisface la ecuación de Laplace en dos dimensiones, el valor de potencial $\Phi(x_i,y_i)$ en un dado punto, $(x_i,y_i)$, del plano es igual al promedio del valor del potencial en los cuatro vecinos próximos.

El método de relajación permite resolver en forma numérica la ecuación de Laplace aplicando esta propiedad de la función potencial, sin embargo, a fin de obtener la solución particular para la configuración de conductores que se desea analizar, es necesario imponer las condiciones de borde adecuadas.

**<u>Procedimiento – Método Numérico:</u>**

Se implementará el método de relajación con un software (o programa) que permita ejecutar cálculos iterativos sobre una matriz de puntos (en nuestro caso 101 x 161) y graficarlos. Los datos a ingresar son los de la configuración de conductores, admitiendo el programa placas y círculos con potencial impuesto (dados) o cuyo valor queda determinado por la solución del problema (es decir elementos que deformen el campo establecido por aquellos que tienen potencial fijo).

1. En una hoja de cálculo (tipo Excel), se establecerá el valor de potencial de cada celda como el valor promedio de los cuatro vecinos más próximos. Se utilizarán (101x161) celdas.
2. Las regiones conductoras se definirán imponiendo a cada celda el mismo valor de potencial que su vecina.
3. En las celdas que constituyen los límites de la hoja de cálculo se impondrán las condiciones de borde adecuadas (**)
4. Luego se realizan una serie de cálculos (iteraciones) hasta que el valor de potencial en las celdas no cambie o hasta que su variación sea menor que un valor previamente definido.
5. Los resultados se grafican eligiéndose el tipo de gráfico: Superficie – Líneas de Contorno.
6. Analice cómo se comparan los resultados teóricos con los experimentales

(**)**<u>Condiciones de Borde</u>**

Existen dos tipos básicos de condiciones de borde en el cálculo propuesto:

- Por un lado están los valores de potencial determinado por los conductores conectados a los bornes de la batería. En este caso el potencial en cada conductor es invariable y está impuesta por el electrodo (0 y 12 V). A esta se la denomina condición de borde de Dirichlet. En los otros conductores de la configuración el potencial es invariable en el interior de los mismos, pero en el contorno del mismo se cumple la condición de continuidad del potencial, por lo tanto se sigue aplicando la condición del promedio, considerando solo los puntos exteriores.

- Las condiciones de borde de Neumann imponen las condiciones de continuidad en la entre un conductor y un dieléctrico. En los bordes del papel de grafito la componente normal de la densidad de corriente debe ser nula, es decir, para que se cumpla la condición de continuidad, no pueden existir líneas de corriente que finalicen en el borde. Esto implica que la componente normal de la densidad de corriente en el borde es nula $J_n\big|_{borde} = 0$. Dado que para el grafito se cumple la ley de Ohm, $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$, esto implica las líneas de campo eléctrico en el borde del papel deben ser tangentes al mismo

$$J_n\big|_{borde} = \sigma \cdot E_n\big|_{borde} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_n\big|_{borde} = 0$$

Solo la componente tangencial del campo puede ser diferente de cero sobre el borde del papel de grafito. $E_t\big|_{borde} \neq 0$, lo cual implica que las líneas equipotenciales deben terminar perpendiculares a los bordes.

En nuestro cálculo, las condiciones de Neuman sobre los bordes de la lámina de grafitos se establecerán imponiendo que cada celda del borde tenga en mismo potencial que su vecina. Por ejemplo, si contamos las filas (i) de izquierda a derecha, de modo tal que el borde izquierdo quede definido por las celdas (0,j), el potencial que se les asignará a estas será:

$$\Phi(0, j) = \Phi(1, j)$$

La condición debe imponer que cada la línea equipotencial sea perpendicular al borde (si está libre, es decir si no es parte de un conductor), por lo tanto debe tener el mismo valor que su vecina en la dirección normal al mismo.