Apunte FII-1-RM: Repaso de Matemática

I. Gradiente

A fin de comprender mejor el concepto de "gradiente" comenzaremos por las bases, analizando, previamente, qué tipo de información nos brinda la derivada de una función escalar unidimensional, $f(x)$, a saber:

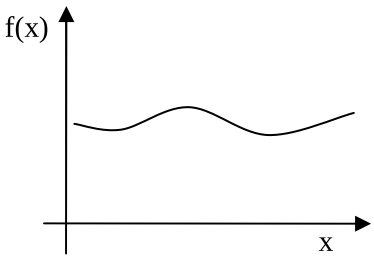
$$\frac{df(x)}{dx} \quad (1)\ -$$

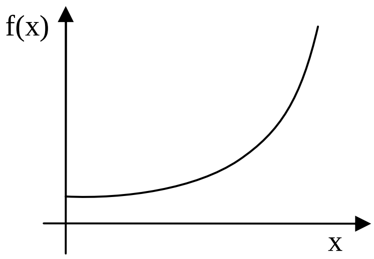
como sabemos la derivada indica qué tan rápidamente varía $f(x)$ cuando el argumento x cambia en una cantidad infinitesimal dx. En otras palabras, si nos desplazamos una cantidad infinitesimal dx desde el punto x, la función $f(x)$ cambia en una cantidad df proporcional a la derivada,

$$df = \left(\frac{df(x)}{dx}\right) \cdot dx \quad (2)$$

aquí df representa a la variación infinitesimal de la función $f(x)$.

Desde el punto de vista geométrico la derivada de $f(x)$ en el punto x representa la pendiente de la función en dicho punto





Bien… ahora extendamos el concepto de derivada al caso de funciones en el espacio F(x, y, z) (ésta representa un campo escalar, si x, y, z son las coordenadas espaciales) ¿Qué significa derivar una función tridimensional? ¿Qué información podemos obtener bajo estas condiciones? Analizando la situación veremos que la cuestión se vuelve mucho más compleja.

A fin de allanar el camino en nuestro análisis, vamos a imaginar que la función en cuestión es aquella que me permite definir punto a punto la temperatura en una habitación. Esta función la designaremos como *T(x,y,z)*, campo de Temperatura. La temperatura de la habitación variará en las tres coordenadas. No será la misma cerca del piso que cerca del techo, así como tampoco se puede decir que sea la misma en el centro y en la vecindad de una ventana o puerta.

Extendamos el concepto de derivada a este campo. Por lo discutido anteriormente la derivada nos debería informar qué tan rápido varía la función, en este caso *T(x,y,z)*, cuando nos movemos una pequeña distancia. Sin embargo es fácil observar que esta variación dependerá de la dirección en la que nos desplazamos. Por ejemplo, si nos movemos hacia arriba probablemente la temperatura aumente con una dada rapidez, en cambio, si nos desplazamos horizontalmente la variación de temperatura será mucho menor o prácticamente nula. En los planos horizontales las variaciones de temperatura son prácticamente nulas. Generalizando, podemos afirmar que la variación de T depende de la dirección en la que nos desplazamos, por lo que la cuestión sobre "qué tan rápido cambia T" tiene infinitas respuestas, una para cada dirección que exploremos.

Afortunadamente un teorema sobre derivadas parciales dice que el diferencial de temperatura dT está dado por:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) dz \qquad (3)$$

Esta expresión nos indica como varía T cuando modificamos las tres variables en cantidades infinitesimales *dx*, *dy*, *dz*. No necesitamos un número infinitos de derivadas, sino que con solo tres, una a lo largo de cada dirección ortogonal, es suficiente para cuantificar *dT*.

La ecuación (3) también se puede escribir como el producto escalar de dos expresiones vectoriales

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left(dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}\right) \qquad (4)$$

$$\mathrm{dT} = \vec{\nabla}\mathrm{T} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \qquad (5)$$

donde, $\mathrm{d}\vec{\ell}$[1] es el elemento de desplazamiento y $\vec{\nabla}\mathrm{T}$[2], el <u>gradiente de T</u>

$$\vec{\nabla}T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{k}\right) \qquad (6)$$

El gradiente de T, $\vec{\nabla}\mathrm{T}$, es una magnitud vectorial. Al <u>aplicar el operador gradiente</u> al campo escalar $T(x, y, z)$ se obtiene como resultado un <u>campo vectorial</u> que depende de las tres variables x, y, z, y que representa la <u>derivada generalizada de $T(x, y, z)$</u>, es decir, la expresión (6), es la versión tridimensional de la derivada definida en (1).

Veamos qué interpretación geométrica tiene el gradiente de un función tridimensional. Como ya puntualizamos el <u>gradiente de $T(x, y, z)$</u> es una función vectorial tridimensional y como todo vector tiene magnitud, dirección y sentido. A fin de analizar el sentido físico del gradiente, reescribiremos la expresión del diferencial de T, expresión (5), aplicando la definición de producto escalar

$$\mathrm{dT} = \vec{\nabla}\mathrm{T} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \left|\vec{\nabla}\mathrm{T}\right| \cdot \left|\mathrm{d}\vec{\ell}\right| \cdot \cos\theta \qquad (7)$$

donde θ es el ángulo entre $\vec{\nabla}\mathrm{T}$ y $\mathrm{d}\vec{\ell}$.

Ahora fijemos la magnitud $\left|\mathrm{d}\vec{\ell}\right|$ y exploremos los resultados de la expresión anterior cuando variamos la dirección del diferencial de desplazamiento $\mathrm{d}\vec{\ell}$, es decir, cuando variamos el ángulo θ. Se observa que el máximo cambio de T ocurre cuando el ángulo θ es cero ($cos(0) = 1$), esto es, cuando $\mathrm{d}\vec{\ell}$ es paralelo al gradiente de T. Esto es, para una distancia $\left|\mathrm{d}\vec{\ell}\right|$ fija, la variación de T es máxima cuando nos movemos en la dirección del gradiente. Por lo tanto, podemos afirmar que:

El gradiente de T, $\vec{\nabla}\mathrm{T}$, es un vector que apunta en la dirección de máximo incremento (variación) del campo T.

La magnitud $\left|\vec{\nabla}\mathrm{T}\right|$ representa la pendiente (razón de cambio) de la función T a lo largo de la dirección de máxima variación.

---

[1] $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{dx}\hat{\imath} + \mathrm{dy}\hat{\jmath} + \mathrm{dz}\hat{k}$

[2] $\vec{\nabla}$ es un operador vectorial denominado “Nabla”

1- Ejercicios propuestos - Gradiente:

1) a) Hallar el gradiente de $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ (observe que esta función, con x, y, z, las componentes cartesianas del vector posición, representa la distancia al origen de coordenadas. ¿cómo puede interpretar al resultado, tiene sentido?
   b) Determine las curvas de contorno, es decir, las líneas que determinan la dirección en la cual la unción tiene variación nula. ¿qué representan dichas curvas en este caso particular?
2) Hallar el gradiente de las siguientes funciones:
   a) $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$
   b) $f(x, y, z) = e^x \cdot sen(y) \cdot ln\,(z)$
3) Demuestre que:
   a) $\vec{\nabla}(r^2) = 2 \cdot \vec{r}$
   b) $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{r}}{r^2}$

II. Operador Nabla $\vec{\nabla}$

El operador $\vec{\nabla}$ aplicado a una función escalar, tal como vimos previamente, nos da como resultado el gradiente de dicha función. La expresión de este operacional es,

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \tag{8}$$

Está claro que Nabla no es un vector. En realidad toma sentido físico una vez que es aplicado a una función, ya sea vectorial o escalar. $\vec{\nabla}$ es una instrucción de operación, en este caso una instrucción de derivar a la función que le sigue y la forma de aplicación cumple con las reglas de operación entre vectores,

Así, si la $T(x, y, z)$ es un campo escalar y $\vec{G}(x, y, z)$ es un campo vectorial,

$$\vec{G} = \left(G_x\hat{\imath} + G_y\hat{\jmath} + G_z\hat{k}\right) \tag{9}$$

la aplicación de nabla a la función escalar T nos da el gradiente de T, expresión (6). En este caso la operación consiste en derivar T con respecto de cada una de las variables y asignarle a cada valor obtenido la dirección del versor asociado a dicha variable.

La aplicación de nabla a un campo vectorial implica también una derivada, pero en este caso la instrucción dependerá del tipo de operación establecida entre las dos expresiones vectoriales, el producto escalar o el producto vectorial.

La aplicación de Nabla sobre $\vec{G}$ vía un producto escalar, implica aplicar cada “componente” del operador sobre la correspondiente componente del Campo vectorial y sumar los resultados, obteniéndose como resultado un campo escalar.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left(G_x\hat{\imath} + G_y\hat{\jmath} + G_z\hat{k}\right) \tag{10}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}\right) \tag{11}$$

En este caso la expresión (11) representa la operación <u>Divergencia del campo Vectorial $\vec{G}$</u>.

$$Divergencia\ de\ \vec{G} = \vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} \right) \quad (12)$$

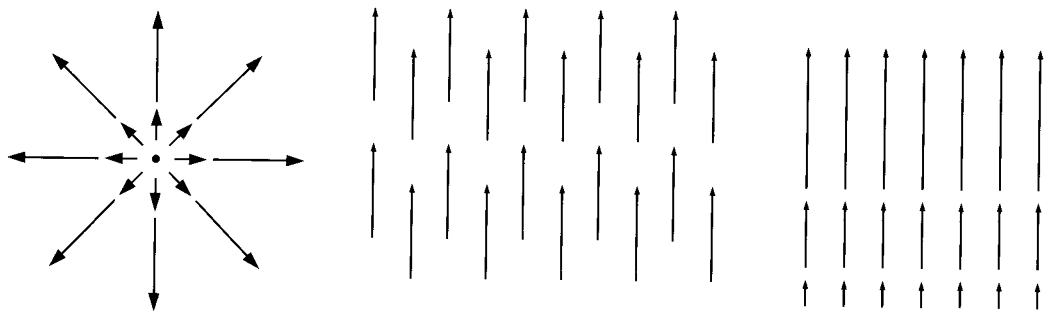
La aplicación de Nabla al campo vectorial $\vec{G}$ a través del producto vectorial da como resultado el Rotor de $\vec{G}$

$$Rotor\ de\ \vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{G} \quad (13)$$

III. Divergencia

La divergencia de un campo vectorial $\vec{G}$ está dada por las expresiones (10) y (11). Observe que el resultado es una función escalar

Veamos cuál es la interpretación geométrica de Divergencia, $\vec{\nabla} \cdot \vec{G}$. A partir de su definición, se observa que ésta es una medida de qué tanto se dispersa (diverge o esparce) el campo vectorial desde el punto en cuestión



(a) (b) (c)

Figura 1: Representación cualitativa de diferentes campos vectoriales.

La función vectorial representada en la Figura 1 tiene una gran divergencia (positiva), la función aumenta en la dirección radial, si las flechas apuntaran hacia dentro, tendría una gran divergencia negativa. El campo representado en (b) tiene divergencia nula y el representado en (c) nuevamente tiene divergencia positiva. Obsérvese que $\vec{G}$ es una función, tiene un vector diferente asociado en cada punto del espacio (valor, dirección y sentido). En la figura se graficaron los vectores en unos pocos puntos representativos. A fin de clarificar la situación, consideremos el siguiente ejemplo. Suponga que Ud se encuentra al borde de un estanque, y esparce algo de aserrín sobre la superficie. Si el material se dispersa separándose eso significa que tiró el aserrín en un punto de divergencia positiva, por otro lado, si el aserrín se agrupa en un punto, dicho punto, tiene divergencia negativa. La función vectorial representada en el modelo aquí imaginado es la velocidad del agua. Este ejemplo bidimensional de un campo de velocidades puede ayudarlo a captar la idea de lo que significa la divergencia.

2- Ejercicios propuestos - Divergencia:

4) Suponga que las funciones en la Figura 1 son
   a) $\vec{G}_a = x\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$
   b) $\vec{G}_b = 1\,\hat{k}$
   c) $\vec{G}_c = z\,\hat{k}$
5) Calcule la divergencia en cada caso.

6) Calcule la divergencia de $\vec{G}_a = x^2\hat{\imath} + 3xz^2\hat{\jmath} - 2xz\,\hat{k}$

7) Calcule la divergencia de la siguiente función vectorial en coordenadas cartesianas y en esféricas

$\vec{G} = \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{x\hat{\imath}+y\,\hat{\jmath}+z\,\hat{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ La respuesta ¿le sorprende? ¿Puede explicarla?

IV. Rotor

Tal como se afirmó anteriormente, el Rotor de $\vec{G}$ se define como la aplicación del operador Nabla a $\vec{G}$ vía el producto vectorial, ecuación (13).

$$Rotor\ de\ \vec{G} = \vec{\nabla} \times \vec{G} == \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix} \tag{14}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = \left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y}\right)\hat{k} \tag{15}$$

El rotor, como cualquier otro producto vectorial, no se puede calcular sobre una función escalar y, por supuesto, el resultado siempre será otra función vectorial.

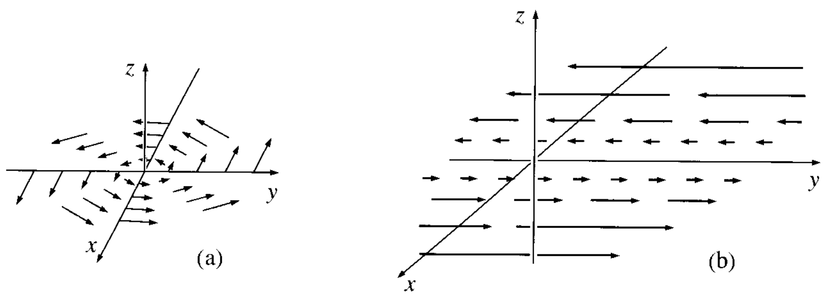


Figura 2

El nombre Rotor está bien elegido, ya que es una medida de qué tanto los vectores "rotan en torno" al punto en cuestión. Así las tres funciones en la Figura 1 tienen rotor nulo (tal como puedes observar directamente), mientras que las funciones (campos) de la Figura 2, claramente, tienen un importante rotor apuntando en la dirección del eje z (versor $\hat{k}$). Imagina nuevamente que estás parado al borde de un estanque y que colocas una flechita de corcho (espiguita, algo que flote) en la superficie del estanque, si ésta empieza a girar en torno al punto luego ésta se encuentra en un punto de rotor *no nulo*. Un remolino es una clara región con un gran rotor

3- Ejercicios propuestos - Rotor:

1) Suponga que las funciones en la Figura 2 son
   a) $\vec{G}_a = y \cdot \hat{\imath} + x \cdot \hat{\jmath}$
   b) $\vec{G}_b = x\,\hat{\jmath}$
2) Calcule el rotor en cada caso
3) Calcule el rotor de la función propuesta en el ejercicio 2) en la sección Divergencia, $\vec{G}_a = x^2\hat{\imath} + 3xz^2\hat{\jmath} - 2xz\,\hat{k}$

Repaso de Matemática: Ejercicios extras

1) Sean los vectores $\vec{u}=(3,-2,5)$ y $\vec{v}=(5,7,-3)$, calcular:

   a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$ c) $\vec{u}+\vec{v}$

   b) $\vec{u}\times\vec{v}$ d) $(5\vec{u}-3\vec{v})\cdot(\hat{i}+2\hat{j})$

Indicar en cada caso si el resultado es un vector o un escalar.

2) Calcular las siguientes integrales:

   a) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2 sen(\theta)\,d\theta d\varphi$ c) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^5 sen(\theta)\,d\theta d\varphi$

   b) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} r'^2\, sen(\theta) dr' d\theta d\varphi$ d) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} (R-r')^5\, sen(\theta) dr' d\theta d\varphi$

   - El resultado de c), ¿es equivalente a considerar el resultado de a) multiplicado por r^3? Justificar
   - El resultado de d), ¿es equivalente a considerar el resultado de b) multiplicado por $(R-r')^3$? Justificar

3) ¿Es $\nabla\times\vec{F}$ necesariamente perpendicular a $\vec{F}$ para cualquier campo vectorial $\vec{F}$? Justificar la respuesta

4) Si $\vec{F}$ es un vector uniforme (independiente de r), demostrar que se verifica: $\vec{\nabla}\cdot(\vec{F}\cdot\vec{r})=\vec{F}$

5) Sea el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$. Demostrar que el rotor de $\vec{F}$ es nulo.

   a) Enuncie el teorema de la Divergencia. Cómo explicaría el sentido físico del flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada S.

   b) Calcular el flujo de $\vec{F}$ a través de una esfera de radio R con centro en el origen de coordenadas. (Ayuda: Aplicar el Teorema de la Divergencia).

   c) ¿Cambiaría en algo el resultado si la superficie estuviera centrada en (a,0,0), con a < R?

6) Dado un campo vectorial $\vec{F}=a\cdot r\,\hat{e}_r$ (en coordenadas esféricas).

   a) Calcular el flujo a través de una superficie esférica concéntrica con el origen del campo vectorial y de radio R. Observe que el resultado es independiente de la superficie de integración

   b) Expresar el campo vectorial en coordenadas cilíndricas.

   c) Calcular el flujo de $\overrightarrow{F}$ a través de la superficie cilíndrica cerrada de radio R que se extiende de z = 0 a z = L y es simétrico alrededor del eje OZ.

      i) OBS: Flujo de $\overrightarrow{F}=\iint\limits_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dS}$

7) Enunciar el teorema de Stokes. Obsérvese que este teorema permite la transformación de una integral de superficie en otra más sencilla.

   a) Comprobar el teorema de Stokes para la función $\vec{F}=(2x-y)\,\hat{\imath}-yz^2\,\hat{\jmath}-y^2z\,\hat{k}$,

donde S es la superficie de una semiesfera (ej. mitad superior de una esfera cuya ecuación en coordenadas cartesianas es $x^2+y^2+z^2=R^2$, con z > 0), y C es la curva cerrada definida por el contorno de la superficie S.

8) Utilizar el teorema de Stokes para evaluar la integral del rotacional del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=xyz\,\hat{i}+xy\,\hat{j}+x^2yz\,\hat{k}$ sobre el dominio S consistente en la unión de la parte superior y de las cuatro caras laterales (pero no el fondo) del cubo con vértices $(+1,+1,+1)$, $(+1,-1,+1)$,

$(-1,-1,+1)$, $(-1,+1,+1)$, $(+1,+1,-1)$, $(+1,-1,-1)$, $(-1,-1,-1)$ y $(-1,+1,-1)$, orientado hacia afuera

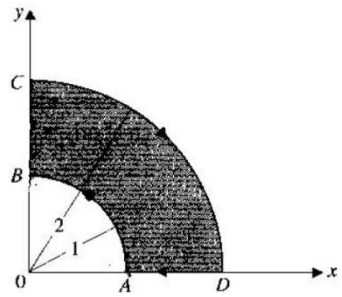
9) Si la función vectorial $\vec{G}$ es, $\vec{G} = (4xy - 3x^2z^2)\hat{\imath} + (2x^2)\hat{\jmath} - 2x^3z\hat{k}$
   a) demostrar que la integral $\int_c \vec{G}\cdot d\vec{l}$ es independiente de la trayectoria C que va de un punto P a otro Q, siendo P y Q puntos fijos.
   b) Demostrar que existe una función derivable, Φ, que verifica $\vec{G} = -\nabla\phi$, y hallar su expresión.

10) Dada la función vectorial $\vec{V} = (x + 2y + az)\hat{\imath} + (bx - 3y - z)\hat{\jmath} + (4x + cy + 2z)\hat{k}$
   a) Hallar las constantes a, b, c de forma que $\vec{V}$ sea irrotacional.
   b) Demostrar que $\vec{V}$ puede expresarse como el gradiente de una función escalar $\emptyset$. Hallar dicha función.

11) Una función vectorial $\vec{E}$ puede derivarse como el gradiente negativo de un potencial escalar $\emptyset$; es decir $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$. Para los siguientes campos escalares $\emptyset$, determinar $\vec{E}$ en el punto (1,1,0)
   a) $\phi = \phi_0 \cdot exp(-x) \cdot sen\left(\pi y/4\right)$
   b) $\phi = \phi_0 \cdot r \cdot cos(\theta)$

12) Sobre una partícula actúa la fuerza $\vec{F} = x^2\,\hat{\imath} + 3xy\,\hat{\jmath}$. Calcular el trabajo realizado por la fuerza al desplazar la partícula desde el punto A(0,0) al B(2,4):
   a) Si la trayectoria es la línea recta que une ambos puntos; b) si la trayectoria es la parábola $y=x^2$
   c) discutir si esta fuerza es conservativa o no.

13) Dado un campo vectorial $\vec{F} = x\,y\,\hat{\mathbf{i}} - 2x\,\hat{\mathbf{j}}$, calcule la circulación de $\vec{F}$ en torno a la curva C, OABO mostrada en la figura



14) Considere una función vectorial $\vec{F} = 5r\,\mathrm{sen}(\varphi)\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} - r^2\cos(\varphi)\hat{\mathbf{e}}_{\varphi}$
   a) Calcule $\oint \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$ a lo largo del contorno ABCD en la dirección indicada en la figura
   b) Calcule $\nabla\times\vec{F}$
   c) Calcule $\int\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot d\vec{s}$ sobre el área sombreada y compare el resultado con el que obtuvo en el inciso a)

15) Una partícula está obligada a moverse en el plano XY bajo la acción de una fuerza conservativa $\vec{F} = 2y\hat{\imath} + 2x\hat{\jmath}$. Calcular:
   a) El trabajo realizado por esta fuerza cuando la partícula se desplaza desde el punto A(x,y) al O(0,0).
   b) La energía potencial, U(x,y) , asociada a la partícula en un punto cualquiera del plano, A(x,y).