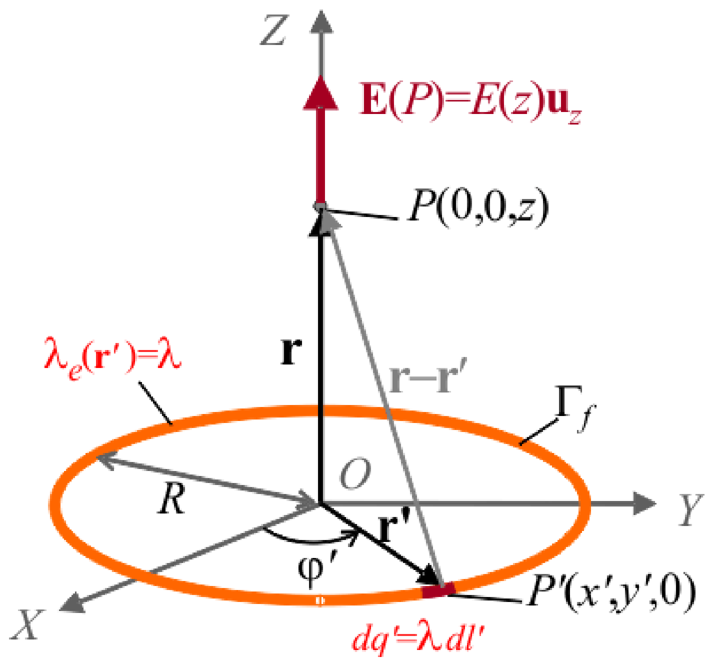
Problema 5) ⊙Una carga Q se encuentra uniformemente distribuida sobre un cículo de radio R (a esta configuración la llamaremos anillo de carga).

a) Calcular el vector campo eléctrico E (magnitud, dirección y sentido) en puntos del eje del anillo, como función de la distancia

b) Hacer una gráfica cualitativa en función de la posición de la componente según x del campo eléctrico ¿en qué puntos del eje z el campo tiene su valor máximo?

c) Explique por qué el campo toma su valor máximo en dicha posición



La existencia de una distribución uniforme de carga eléctrica en el anillo significa que la cantidad de carga eléctrica por unidad de longitud es la misma en todos los puntos del anillo. O lo que es lo mismo, que existe una relación constante entre la cantidad de carga contenida en un tramo arbitrario de anillo y la longitud de dicho tramo. De esta forma, si la cantidad total de carga distribuida es *Q*, y el anillo tiene radio *R*, la densidad lineal de carga en cualquier punto *P*' del anillo será:

$$\lambda_e(\mathbf{r}') = \lim_{\Delta l' \to 0} \left.\frac{\Delta q}{\Delta l'}\right]_{P'} = \frac{\Delta q}{\Delta l'}, \ \forall\, \Delta l' \quad \lambda_e(\mathbf{r}') = \frac{Q}{2\pi R} = \lambda\ ,\ \text{cte.}$$

,

La expresión general para el campo creado por una distribución lineal de carga es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\Gamma_f} \lambda(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,\mathrm{d}l'$$

Como deseamos calcular el campo eléctrico exclusivamente en los puntos del eje perpendicular al plano que contiene al aro y que pasa por el centro de éste, y que tomaremos como eje Z, de manera que:

$$\mathbf{r} = z\mathbf{u}_z$$

Por su parte, podemos parametrizar los puntos del anillo como:

$$\left\{ \begin{aligned} &\mathbf{r}' = R(\cos\varphi'\mathbf{u}_x + \operatorname{sen}\varphi'\mathbf{u}_y) \\ &\mathrm{d}\mathbf{r}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}\varphi'}\mathrm{d}\varphi' = R(-\operatorname{sen}\varphi'\mathbf{u}_x + \cos\varphi'\mathbf{u}_y)\,\mathrm{d}\varphi' \\ &\mathrm{d}l' = |\mathrm{d}\mathbf{r}'| = R\,\mathrm{d}\varphi' \end{aligned} \right.$$

La distancia del punto de medida a la posición de las fuentes, igual para todos los puntos del anillo

$$\left\{ \begin{aligned} &\mathbf{r} - \mathbf{r}' = -R\cos\varphi'\mathbf{u}_x - R\operatorname{sen}\varphi'\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z \\ &|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{R^2 + z^2} \end{aligned} \right.$$

El campo nos queda entonces:

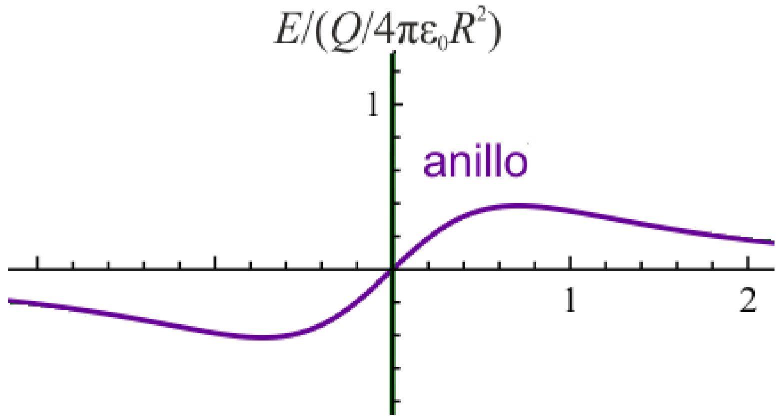
$$\mathbf{E}(z) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\left(\frac{-R\cos\varphi'\mathbf{u}_x - R\operatorname{sen}\varphi'\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\right)R\,\mathrm{d}\varphi'$$

Las componentes en x e y se anulan al integrar sobre un periodo, de forma que el campo sólo posee componente en la dirección z. Este resultado es previsible a la vista de otros problemas con sistemas simétricos. Para cada punto del anillo existe uno diametralmente opuesto cuyas componentes x e y del campo anulan a las del primero. Esto nos deja sólo con la componente z que además no depende de φ, y que podemos integrar trivialmente

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda R z\mathbf{u}_z}{2\varepsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{Qz\mathbf{u}_z}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

con $Q = 2\pi R/\lambda$ la carga total.

El campo posee una dependencia en z como la ilustrada en la figura a continuación. Justo en el punto central el campo es nulo. Al aumentar z crece, para luego disminuir a medida que nos alejamos del anillo y de su influencia.



Cuando $z \longrightarrow \infty$ el campo tiende a:

$$\mathbf{E} \rightarrow \frac{\lambda R z \mathbf{u}_z}{2\varepsilon_0 |z|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q\mathbf{r}}{r^3}$$

Según esto, si nos situamos puntos muy alejados del anillo, su tamaño pasa a ser despreciable y lo percibimos simplemente como una carga puntual, como muestra la figura a continuación: