1 Problema 3. Guia 3.

Dos medios dielectricos homogeneos con constantes dielectricas $K_1 = 2$ y $K_2 = 3$, y conductividades $\sigma_1 = 15\frac{S}{m}$ y $\sigma_2 = 10\frac{S}{m}$, están en contacto en el plano $z = 0$. en la región $z > 0$ (medio 1), hay un campo electrico uniforme $\overrightarrow{E}_1 = 20\widehat{e}_x - 20\widehat{e}_z(V/m)$. Determine:

a) $\overrightarrow{E}_2$ del medio 2.

b) $\overrightarrow{J}_1$ y $\overrightarrow{J}_2$.

c) Los ángulos que forman $\overrightarrow{J}_1$ y $\overrightarrow{J}_2$ con el plano $z = 0$.

d) La densidad de carga superficial en la superficie $z = 0$.

1.1 Resolución

Para poder determinar el campo electrico y las corrientes en los dos medios es necesario saber como seran las condiciones de borde. En primer lugar tenemos la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \overrightarrow{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{1}$$

que si lo integramos en el volumen y usamos el teorema de la divergencia se transforma en

$$\int \overrightarrow{J} \cdot \overrightarrow{n} dS = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \tag{2}$$

donde $\overrightarrow{n}$ es un vector normal a la superficie que separa ambos medios, en este caso es un vector perpendicular a la linea $z = 0$. Si suponemos que la corriente es estacionaria, entonces $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ y la ecuacion anterior queda

$$J_z^{(1)} = J_z^{(2)} \tag{3}$$

es decir, la componente normal de las corrientes a la superficie que separa ambos medios son iguales.

Por otro lado, podemos calcular la integral de linea de $\nabla \times \overrightarrow{E} = 0$ y usar el teorema de Stokes, entonces

$$\oint \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{l} = 0 \tag{4}$$

si la linea cerrada por donde se calcula la integral pasa por los dos medios el resultado final es

$$E_x^{(1)} = E_x^{(2)} \tag{5}$$

este resultado es entendible, ya que en la dirección x no cambia nada, por lo tanto las componentes del campo electrico en esta dirección no deben cambiar. Finalmente, la última condición de borde a tener en cuenta es la ley de Gauss para el vector desplazamiento:

$$\nabla \cdot \overrightarrow{D} = \rho_{libre} \tag{6}$$

en este caso, integrando en el volumen y usando el teorema de la divergencia encontramos que

$$D_z^{(1)} - D_z^{(2)} = \rho_{libre} \tag{7}$$

usando que el vector desplazamiento es $\overrightarrow{D} = K\epsilon_0\overrightarrow{E}$, entonces

$$K_1E_z^{(1)} - K_2E_z^{(2)} = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0} \tag{8}$$

Usando las condiciones de borde de la ec.(3), ec.(5) y ec.(8) ya es posible resolver el problema.

a) Para calcular el campo electrico del medio 2 se usa las dos primeras condiciones de borde. La componente x queda igual, entonces

$$E_x^{(2)} = 20 \tag{9}$$

La componente en z se calcula usando la condicion de la ec.(3), ya que por la ley de Ohm $\overrightarrow{J} = \sigma \overrightarrow{E}$, entonces

$$\sigma_1 E_z^{(1)} = \sigma_2 E_z^{(2)} \tag{10}$$

Entonces

$$E_z^{(2)} = \frac{\sigma_1 E_z^{(1)}}{\sigma_2} = -\frac{15}{10}20 = -30 \tag{11}$$

b) Sabiendo las componentes del campo electrico en un medio y el otro medio, podemos calcular la corriente a traves de la ley de Ohm

$$\overrightarrow{J}_1 = \sigma_1 \overrightarrow{E}_1 = 15(20\widehat{e}_x - 20\widehat{e}_z) \tag{12}$$

y

$$\overrightarrow{J}_2 = \sigma_2 \overrightarrow{E}_2 = 10(20\widehat{e}_x - 30\widehat{e}_z) \tag{13}$$

c) Para calcular los ángulos entre las corrientes, necesitamos calcular la tangente

$$\tan\theta_i = \frac{J_x^{(i)}}{J_z^{(i)}} \tag{14}$$

donde el supraindice indica que medio estamos teniendo en cuenta. Para el medio 1

$$\tan\theta_1 = \frac{J_x^{(1)}}{J_z^{(1)}} = 1 \tag{15}$$

y para el medio 2

$$\tan\theta_2 = \frac{J_x^{(2)}}{J_z^{(2)}} = \frac{2}{3} \tag{16}$$

de ambos resultados se puede calcular el ángulo calculando el arcotangente.

d) Para calcular la densidad de carga superficial debemos usar la condición de borde de la ecuación (8)

$$K_1 E_z^{(1)} - K_2 E_z^{(2)} = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0} \qquad \rho_{libre} = 50\epsilon_0 \tag{17}$$