

Resolución de problemas electrostáticos

La resolución de un problema electrostático es directa para el caso en el que la distribución de carga esté especificada en todo punto, puesto que, como hemos visto, el potencial y el campo eléctrico están dados directamente como integrales sobre esta distribución de carga:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3-1)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (3-2)$$

Sin embargo, muchos de los problemas encontrados en la práctica no son de este tipo. Si la distribución de carga no se especifica de antemano, puede ser necesario determinar el campo eléctrico *primero*, para posteriormente poder calcular la distribución de carga. Por ejemplo, en un problema electrostático pueden intervenir varios conductores, conociéndose ya sea el potencial o la carga total de cada conductor, pero, en general, la distribución de la carga superficial no será conocida y debe obtenerse como parte de la resolución del problema.

Nuestro propósito en este capítulo es crear un enfoque alternativo de los problemas electrostáticos, y para lograr esto deduciremos primero la ecuación diferencial fundamental que debe satisfacer el potencial φ . Por ahora no tendremos en cuenta problemas en los que intervienen cuerpos dieléctricos; los problemas de este tipo se resolverán en el capítulo 4.

3.1

ECUACIÓN DE POISSON

Todas las relaciones básicas que necesitaremos aquí se desarrollaron en el capítulo anterior. Primero, tenemos la forma diferencial de la ley de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (3-3)$$

Además, en un campo puramente electrostático, \mathbf{E} puede expresarse como menos el gradiente del potencial φ :

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \quad (3-4)$$

Combinando (3-3) y (3-4), obtenemos

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3-5a)$$

Como observamos en el capítulo 1, es conveniente considerar la divergencia del gradiente como un solo operador diferencial, $\nabla \cdot \nabla$ o ∇^2 , llamado *laplaciano*.

El laplaciano es un operador diferencial escalar y la ecuación (3-5b) es una ecuación diferencial conocida como *ecuación de Poisson*:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3-5b)$$

El operador ∇^2 implica la derivación con respecto a más de una variable. En consecuencia, la ecuación de Poisson es una *ecuación en derivadas parciales* que puede resolverse una vez que se conoce la dependencia funcional de $r(x, y, z)$ y las condiciones adecuadas en la frontera.

El operador ∇^2 , así como el ∇ , $\nabla \cdot$ y $\nabla \times$, no hacen referencia a ningún sistema de coordenadas particular. Para resolver un problema determinado, debemos expresar ∇^2 en función de x, y, z o de r, θ, ϕ , o de algún otro sistema coordenado. La elección del sistema particular de coordenadas es arbitraria, pero se logrará una extraordinaria simplificación del problema si se elige un sistema compatible con la simetría del problema electrostático. La forma que toma $\nabla^2\varphi$ en diferentes sistemas de coordenadas se halla fácilmente tomando primero el gradiente de φ y aplicando luego $\nabla \cdot$. Utilizando expresiones específicas del capítulo 1 (o del Apéndice IV), tenemos las siguientes formas.*

Coordenadas rectangulares:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \quad (3-6)$$

Coordenadas esféricas: sen

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} \quad (3-7)$$

* Para la forma del laplaciano en otros sistemas coordenados más complicados, el lector puede ver las referencias al final de este capítulo.

Coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (3-8)$$

Deberá observarse que r y θ tienen distintos significados en (3-7) y (3-8). En coordenadas esféricas, r es la magnitud del radio vector desde el origen y θ es el ángulo polar. En coordenadas cilíndricas, r es la distancia perpendicular al eje del cilindro y θ es el ángulo azimutal con respecto a este eje.

3.2 ECUACIÓN DE LAPLACE

En cierto tipo de problemas electrostáticos en los que intervienen conductores, toda la carga se encuentra ya sea sobre la superficie de los conductores o en forma de cargas puntuales fijas. En estos casos, ρ es cero en la mayoría de los puntos del espacio.

Donde se anula la densidad de carga, la ecuación de Poisson se reduce a la forma más sencilla

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (3-9)$$

que es la *ecuación de Laplace*.

Supongamos que tenemos un conjunto de N conductores que se mantienen a los potenciales $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$. Nuestro problema es hallar el potencial en todos los puntos del espacio exterior a los conductores. Esto puede lograrse encontrando una solución de la ecuación de Laplace que se reduce a $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ sobre la superficie de los conductores apropiados. Puede demostrarse que dicha solución de la ecuación de Laplace es única, es decir, que no hay otra solución de la ecuación de Laplace que satisfaga las mismas condiciones en la frontera. Una demostración de este enunciado se dará a continuación. La solución de la ecuación de Laplace que encontramos de esta forma no se aplica al interior de los conductores porque éstos tienen carga superficial, lo que implica una discontinuidad en el gradiente de φ a través de la superficie (véase la Sec. 2.7). Pero hemos visto ya que el interior de cada conductor es una región de potencial constante, de modo que la solución a nuestro problema es completa.

Describiremos con cierto detalle dos métodos para la solución de la ecuación de Laplace. El primero es un método para componer una solución general de la ecuación (3-9) a partir de soluciones particulares (funciones base) en un sistema de coordenadas exigido por la simetría del problema; el segundo es el método de imágenes. Además, se hallará una solución completamente general para el problema en dos dimensiones. Sin embargo, antes de considerar estos procedimientos específicos, demostraremos algunas propiedades importantes de la solución de la ecuación de Laplace.

Teorema I. Si $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ son todas soluciones de la ecuación de Laplace, entonces:

$$\varphi = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + \dots + C_n \varphi_n \quad (3-10)$$

donde las C son constantes arbitrarias, también es una solución.

La demostración de este teorema es inmediata a partir del hecho de que

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \nabla^2 C_1 \varphi_1 + \nabla^2 C_2 \varphi_2 + \dots + \nabla^2 C_n \varphi_n \\ &= C_1 \nabla^2 \varphi_1 + C_2 \nabla^2 \varphi_2 + \dots + C_n \nabla^2 \varphi_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

Utilizando el teorema I podemos superponer dos o más soluciones de la ecuación de Laplace, de tal manera que la solución resultante satisfaga un conjunto dado de condiciones en la frontera. Se darán ejemplos en las siguientes secciones.

Teorema II: Teorema de unicidad. Dos soluciones de la ecuación de Laplace que satisfacen las mismas condiciones en la frontera difieren a lo sumo en una constante aditiva.

Para demostrar este teorema consideremos una región cerrada V_0 exterior a las superficies S_1, S_2, \dots, S_N de los diversos conductores del problema y limitada en el exterior por una superficie S , siendo esta última una superficie en el infinito o una superficie física real que encierra V_0 . Supongamos que φ_1 y φ_2 son dos soluciones de la ecuación de Laplace en V_0 que, además, tienen las *mismas* condiciones en la frontera sobre S, S_1, S_2, \dots, S_N . Estas condiciones en la frontera pueden determinarse asignando valores ya sea para φ o $\partial\varphi/\partial n$ sobre las superficies limitadoras.

Definimos una nueva función $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$. Evidentemente, $\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \varphi_1 - \nabla^2 \varphi_2 = 0$ en V_0 . Por otro lado, Φ o $n \cdot \nabla \Phi$ se anula en las fronteras. Así, aplicando el teorema de la divergencia al vector $\Phi \nabla \Phi$ tenemos:

$$\int_{V_0} \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) \, dv = \int_{S+S_1+\dots+S_N} \Phi \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} \, da = 0$$

ya que la segunda integral se anula. La divergencia puede desarrollarse según la ecuación (1.1.7) de la tabla 1.1 para que dé:

$$\nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) = \Phi \nabla^2 \Phi + (\nabla \Phi)^2$$

Pero $\nabla^2 \Phi$ se anula en todos los puntos de V_0 , de modo que el teorema de la divergencia se reduce en este caso a

$$\int_{V_0} (\nabla \Phi)^2 \, dv = 0$$

Ahora $(\nabla\Phi)^2$ debe ser positivo o cero en cada punto de V_0 y, puesto que su integral es cero, es evidente que $(\nabla\Phi)^2 = 0$ es la única posibilidad.

El teorema queda así esencialmente demostrado. Una función cuyo gradiente es cero en todos los puntos no puede cambiar; por tanto, en todos los puntos de V_0 , Φ tiene el mismo valor que el que tiene en las superficies limitadoras. Si las condiciones en la frontera se han dado al especificar ϕ_1 y ϕ_2 en las superficies S_1, S_2, \dots, S_N , entonces, puesto que $\nabla\Phi = 0$ sobre estas superficies, éste se anula en todo V_0 . Si las condiciones en la frontera se dan en función de $\partial\phi_1/\partial n$ y $\partial\phi_2/\partial n$, entonces $\nabla\Phi$ es igual a cero en todos los puntos de V_0 y $\nabla\Phi \cdot n = 0$ sobre las fronteras. La única solución compatible con el último enunciado es que Φ sea igual a una constante.

3.3

ECUACIÓN DE LAPLACE CON UNA VARIABLE INDEPENDIENTE

Si φ es función de una sola variable, la ecuación de Laplace se reduce a una ecuación diferencial ordinaria. Considérese el caso en que φ es $\varphi(x)$, es decir, una función de una sola coordenada rectangular x . Entonces

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \quad \text{y} \quad \varphi(x) = ax + b \tag{3-11}$$

es la solución general, donde a y b son constantes elegidas de tal modo que se cumplan las condiciones de la frontera. Éste es el resultado que se encontró en el capítulo anterior para el potencial entre dos placas conductoras cargadas con orientación normal al eje x .

La situación no es más complicada en otros sistemas coordenados en los que φ es una función de una sola variable. En coordenadas esféricas, donde φ es igual a $\varphi(r)$, la ecuación de Laplace y su solución general se convierten en

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0, \quad \varphi(r) = -\frac{a}{r} + b \tag{3-12}$$

La solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas para una función independiente de θ y z , es decir, para $\varphi(r)$, se deja como ejercicio en la sección de problemas.

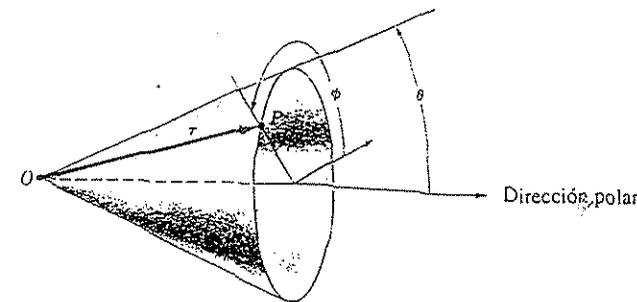
3.4

SOLUCIONES A LA ECUACIÓN DE LAPLACE EN COORDENADAS ESFÉRICAS: ARMÓNICOS ESFÉRICOS

Dirigimos ahora nuestra atención a las soluciones de la ecuación de Laplace en las que φ es función de más de una variable. Muchos de los problemas que nos interesan tratan de conductores en forma de esferas o cilindros y, por tanto, se necesitan soluciones de la ecuación de Laplace ya sea en coordenadas esféricas o cilíndricas. Primero abordaremos el problema esférico, pero veremos que conviene limitar el análisis

FIGURA 3.1

Localización del punto P en función de las coordenadas esféricas r, θ, ϕ .



a los casos en que φ es independiente del ángulo azimutal ϕ . Esta limitación restringe la clase de problemas que podremos resolver. Sin embargo, muchos problemas físicos de interés quedan dentro de esta categoría restringida y los problemas más complicados se encuentran más allá del alcance de este texto.

Para el caso esférico, φ es $\varphi(r, \theta)$, donde r es el radio vector que va desde un origen fijo O y θ es el ángulo polar (véase la Fig. 3.1). Al utilizar la ecuación (3-7), la ecuación de Laplace se convierte en este caso en

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \tag{3-13}$$

Esta ecuación diferencial parcial se resolverá por una técnica conocida como *separación de variables*. Una solución de la forma $\varphi(r, \theta) = Z(r)P(\theta)$ se sustituye en la ecuación (3-13), lo que produce

$$\frac{1}{r^2} P(\theta) \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) + \frac{Z(r)}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = 0 \tag{3-14}$$

Observe que las derivadas parciales han sido sustituidas por derivadas totales, puesto que Z y P son funciones de una sola variable. Dividiendo por $\varphi(r, \theta)$ y multiplicando por r^2 , transformamos la ecuación (3-14) en

$$\frac{1}{Z} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) = - \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \tag{3-15}$$

El lado izquierdo de esta ecuación es función únicamente de r y el lado derecho es función de θ . La única forma en que una función de r puede ser igual a una función de θ para todos los valores de r y θ es que ambas funciones sean constantes. En consecuencia, igualaremos cada miembro de la ecuación (3-15) a k , siendo k la "constante de separación".

No todos los valores de k proporcionan necesariamente soluciones aceptables con bases físicas. Considere primero la ecuación para θ , conocida como *ecuación de Legendre*:

TABLA 3.1
Polinomios de Legendre para $n = 0, 1, 2$ y 3 .

n	$P_n(\theta)$
0	1
1	$\cos \theta$
2	$\frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + kP = 0 \tag{3-16}$$

Las únicas soluciones físicamente aceptables que están definidas en el intervalo de θ , que va desde 0 hasta (π) corresponden a $k = n(n + 1)$, siendo n un entero positivo. La solución para una n en particular se representará con $P_n(\theta)$. Las soluciones de la ecuación (3-16) para otros valores de k no se comportan bien en la vecindad de $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ radianes, volviéndose infinitas o incluso indefinidas para esos valores de θ .*

Estas soluciones no pueden satisfacer condiciones físicas en la frontera y, por tanto, deben descartarse.†

Las soluciones aceptables, $P_n(\theta)$, son polinomios en $\cos \theta$ y generalmente se denominan *polinomios de Legendre*. Las primeras cuatro funciones de Legendre se dan en la tabla 3.1. Es evidente de la ecuación (3-16) que los P_n pueden multiplicarse por cualquier constante arbitraria.

Volvamos ahora a la ecuación radial

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dZ}{dr} \right) = n(n + 1)Z \tag{3-17}$$

donde hemos empleado la forma explícita de k que dio soluciones de θ aceptables. La inspección de la ecuación (3-17) muestra que dos soluciones independientes son

$$Z_n = r^n \quad \text{y} \quad Z_n = r^{-(n+1)}$$

Las soluciones de la ecuación de Laplace se obtienen mediante el producto $\varphi_n(r, \theta) = Z_n(r)P_n(\theta)$, donde debe tenerse especial cuidado para que Z y P correspondan al mismo valor de n . Esto es imprescindible, puesto que ambos miembros de la ecuación (3-15) son iguales a la misma constante, es decir, $n(n + 1)$.

* La exposición ha sido demasiado breve. El lector que se interese en el tema deberá consultar más textos de matemáticas para un tratamiento detallado de la ecuación de Legendre. Véanse, por ejemplo, los libros indicados al final de este capítulo. La ecuación de Legendre se expresa generalmente en una forma distinta, sustituyendo $x = \cos \theta$, y sus soluciones se representan entonces con $P_n(x)$ o $P_n(\cos \theta)$.

† Este enunciado requiere algunas limitaciones. En algunos problemas electrostáticos, las regiones alrededor de $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ pueden excluirse, naturalmente, por ejemplo, por superficies cónicas conductoras. En estas condiciones podrían también utilizarse las soluciones de la ecuación (3-16) con otros valores de k . Los problemas de este tipo no se considerarán aquí.

Hemos resuelto así la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, obteniendo así las soluciones conocidas como *armónicos esféricos*:

$$\varphi_n = r^n P_n(\theta) \quad \text{o} \quad \varphi_n = r^{-(n+1)} P_n(\theta) \tag{3-18}$$

donde $P_n(\theta)$ es uno de los polinomios de la tabla 3.1 y n es un entero positivo o cero. Los armónicos esféricos forman un conjunto de funciones adecuado para la solución de la ecuación de Laplace con fronteras esféricas y simetría azimutal. Estas soluciones pueden combinarse de acuerdo con el Teorema I. Varios de los armónicos de zona ya nos son bien conocidos: una de las soluciones para $n = 0$, es decir, $\varphi = \text{constante}$, es una solución trivial de la ecuación de Laplace, válida en cualquier sistema de coordenadas; el armónico esférico r^{-1} es el potencial de una carga puntual, y $r^{-2} \cos \theta$ es el potencial de un dipolo.

3.5

ESFERA CONDUCTORA EN UN CAMPO ELÉCTRICO UNIFORME

Ilustraremos la utilidad de los armónicos de zona para problemas electrostáticos que tienen simetría esférica resolviendo el problema de una esfera conductora descargada colocada en un campo eléctrico *inicialmente* uniforme, E_0 . Las líneas de un campo eléctrico uniforme son paralelas, pero la presencia del conductor altera el campo de tal manera que las líneas de éste chocan perpendicularmente con la superficie del conductor, que es una superficie equipotencial. Si tomamos la dirección del campo eléctrico inicialmente uniforme como la dirección polar (dirección z) y si fijamos el origen de nuestro sistema de coordenadas de modo que coincida con el centro de la esfera, entonces de la simetría del problema se ve que el potencial será independiente del ángulo azimutal ϕ y puede expresarse como una suma de los armónicos esféricos.

El conductor esférico, de radio a , es una superficie equipotencial; representemos este potencial con φ_0 . Nuestro problema es hallar una solución de la ecuación de Laplace en la región exterior a la esfera que se reduzca a φ_0 sobre la esfera misma y que tenga la forma limitadora correcta a grandes distancias de separación. La solución puede expresarse formalmente como

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) = & A_1 + C_1 r^{-1} + A_2 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta \\ & + \frac{1}{2} A_3 r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{1}{2} C_3 r^{-3} (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \end{aligned} \tag{3-19}$$

donde las A y las C son constantes arbitrarias. Para r grande, el campo eléctrico se distorsionará sólo ligeramente con respecto a su forma inicial y el potencial será el apropiado para un campo eléctrico uniforme.

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}(r, \theta)]_{r \rightarrow \infty} &= \mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{k} \\ [\varphi(r, \theta)]_{r \rightarrow \infty} &= -E_0 z + \text{constante} \\ &= -E_0 r \cos \theta + \text{constante} \end{aligned} \tag{3-20}$$

En consecuencia, para que concuerden las ecuaciones (3-19) y (3-20) para r grande, $A_2 = -E_0$. Además, todas las A desde A_3 en adelante deben igualarse a cero.

El término $C_1 r^{-1}$ produce un campo radial que, como podría esperarse, es compatible sólo con un conductor esférico que tiene una carga total neta. Como nuestro problema trata de un conductor descargado, la constante C_1 debe igualarse a cero. En la superficie de la esfera, $\varphi = \varphi_0$, y el potencial debe ser independiente del ángulo θ . Los dos términos en que interviene $\cos \theta$ pueden eliminarse entre sí, pero los términos con potencias inversas de r , mayores, no pueden eliminarse entre sí debido a que contienen funciones de Legendre diferentes. La única posibilidad es igualar todas las C_i a cero cuando $i \geq 3$. La ecuación (3-19) se convierte ahora en

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= A_1 - E_0 r \cos \theta + C_2 r^{-2} \cos \theta, \quad \text{para } r \geq a \\ \varphi(a, \theta) &= \varphi_0 \end{aligned} \quad (3-21)$$

Ya que las dos expresiones deben ser iguales en $r = a$, $A_1 = \varphi_0$ y $C_2 = E_0 a^3$.

De la última expresión para el potencial, podemos calcular no sólo el campo eléctrico en todos los puntos del espacio (véase la Fig. 3.2), sino también la densidad superficial de carga sobre la esfera conductora:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = E_0 \left(1 + 2 \frac{a^3}{r^3}\right) \cos \theta \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -E_0 \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \sin \theta \end{aligned} \right\} \text{ para } r \geq a \quad (3-22)$$

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 E_r|_{r=a} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta \quad (3-23)$$

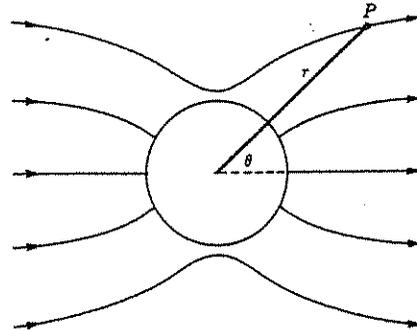
La carga total sobre la esfera,

$$Q = a^2 \int_0^\pi \sigma(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta$$

es evidentemente cero, lo que concuerda con nuestra suposición inicial.

FIGURA 3.2

Líneas de flujo eléctrico para el caso de una esfera conductora colocada en un campo eléctrico uniforme.



3.6

SOLUCIONES A LA ECUACIÓN DE LAPLACE EN COORDENADAS CILÍNDRICAS: ARMÓNICOS CILÍNDRICOS

La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas puede resolverse también por el método de separación de variables. Aquí nuevamente conviene resolver sólo un tipo restringido de problemas, es decir, aquellos en los cuales el potencial es independiente de la coordenada z . Estas soluciones son apropiadas para ciertos problemas en los que interviene un conductor cilíndrico o alambre recto y largo, pero *no* para aquellos que tratan de un segmento cilíndrico corto.

Si el potencial es independiente de z , la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas se convierte en

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3-24)$$

Al sustituir $\varphi = Y(r)S(\theta)$, la ecuación se reduce a

$$\frac{r}{Y} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dY}{dr} \right) = -\frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\theta^2} = k \quad (3-25)$$

donde k nuevamente desempeña el papel de una constante de separación. La ecuación para θ es particularmente sencilla; tiene por soluciones $\cos k^{1/2} \theta$ y $\sin k^{1/2} \theta$. Pero para que estas soluciones tengan sentido físico, cada una debe ser una función univalente de θ ; por lo que

$$\cos k^{1/2}(\theta + 2\pi) = \cos k^{1/2} \theta$$

$$\sin k^{1/2}(\theta + 2\pi) = \sin k^{1/2} \theta$$

O, dicho de otra forma, una vez que θ ha recorrido todo el intervalo desde 0 hasta 2π , la función debe unirse suavemente a su valor en $\theta = 0$. Esto puede suceder sólo si $k = n^2$, siendo n un entero. Podemos, además, pedir que n sea positivo (o cero) sin perder ninguna de estas soluciones.

Volviendo a la ecuación de r , podemos verificar fácilmente que $Y(r)$ es r^n o r^{-n} ; a menos que $n = 0$ cuando $Y(r) = \ln r$ o $Y(r) = \text{constante}$. En consecuencia, las soluciones buscadas de la ecuación de Laplace, que se denominan *armónicos cilíndricos*, son

$$\begin{array}{ll} 1 & \ln r \\ r^n \cos n\theta & r^{-n} \cos n\theta \\ r^n \text{senn}\theta & r^{-n} \text{senn}\theta \end{array}$$

Estas funciones forman un conjunto completo para las variables r, θ en coordenadas cilíndricas, y el potencial $\varphi(r, \theta)$ puede desarrollarse como una superposición de armónicos cilíndricos de acuerdo con el teorema I.

*3.7 ECUACIÓN DE LAPLACE EN COORDENADAS RECTANGULARES

En coordenadas rectangulares, las variables pueden separarse haciendo la sustitución

$$\varphi(x, y, z) = f_1(x)f_2(y)f_3(z)$$

por lo que la ecuación de Laplace se reduce a

$$\frac{1}{f_1(x)} \frac{d^2 f_1}{dx^2} + \frac{1}{f_2(y)} \frac{d^2 f_2}{dy^2} = -\frac{1}{f_3(z)} \frac{d^2 f_3}{dz^2} \quad (3-26a)$$

El lado izquierdo de esta ecuación es una función de x e y , y el derecho es función de z únicamente; en consecuencia, ambos miembros deben igualarse a la misma constante, k . Esta constante es la primera constante de separación. Las dos ecuaciones obtenidas a partir de (3-26a) son.

$$\frac{d^2 f_3}{dz^2} + k f_3 = 0 \quad (3-26b)$$

$$\frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{dy^2} = k - \frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{dx^2}$$

Esta última ecuación se ha expresado de tal forma que las variables x e y estén separadas. Cada miembro de esta ecuación se iguala ahora a $-m$ (segunda constante de separación). Por tanto,

$$\frac{d^2 f_2}{dy^2} + m f_2 = 0 \quad (3-26c)$$

$$\frac{d^2 f_1}{dx^2} - (k + m) f_1 = 0 \quad (3-26d)$$

Las ecuaciones (3-26b), (3-26c) y (3-26d) se resuelven fácilmente. Una de las soluciones típicas para $\varphi(x, y, z)$ es

$$\varphi(x, y, z) = A e^{-(k+m)^{1/2}x} \cos m^{1/2}y \cos k^{1/2}z \quad (3-27)$$

Las otras siete soluciones independientes para un par de constantes de separación (k , m) se obtienen haciendo una o más de las siguientes sustituciones: $+(k+m)^{1/2}x$ por $-(k+m)^{1/2}x$, $\sin m^{1/2}y$ por $\cos m^{1/2}y$ y $\sin k^{1/2}z$ por $\cos k^{1/2}z$.

Hasta ahora no ha habido restricción sobre k ni sobre m , pero las condiciones en la frontera del problema restringen generalmente k (o m) a un conjunto discreto de valores positivos o negativos. Vale la pena observar que las condiciones en la frontera son las que realmente imperan en la selección de las *soluciones pertinentes* para una ecuación diferencial parcial. Para x e y fijos, la siguiente función es justamente el *desarrollo en serie de Fourier* para una función par arbitraria de z :

* Las secciones con asterisco pueden ser omitidas sin perder continuidad.

$$\varphi(x, y, z) = \sum_p \sum_q A_{pq} e^{-(p^2+q^2)^{1/2}x} \cos py \cos qz$$

Las soluciones individuales en la ecuación (3-27) no representan potenciales que corresponden a situaciones físicas sencillas. Sin embargo, el caso en el que ambas constantes de separación son cero corresponde a una situación física de interés; por tanto, dirigiremos nuestra atención a este caso. De la ecuación (3-26d), es evidente que $f_1(x) = a_1 x$, o sea, $f_1(x) = \text{constante}$, es una solución; de la ecuación (3-26c) obtenemos $f_2(y)$, etc. Así,

$$\varphi(x, y, z) = A_1 xyz + A_2 xy + A_3 yz + A_4 xz + A_5 x + A_6 y + A_7 z + A_8 \quad (3-28a)$$

donde las A son constantes arbitrarias. Esta solución puede aplicarse al caso en el que tres planos conductores se cortan perpendicularmente. Si estos planos son los planos coordenados xy , yz y zx , y todos están al mismo potencial, entonces

$$\varphi(x, y, z) = A_1 xyz + A_8 \quad (3-28b)$$

Se deja como ejercicio para el lector determinar la densidad de carga superficial sobre los planos coordenados que es compatible con la ecuación (3-28b).

*3.8 ECUACIÓN DE LAPLACE EN DOS DIMENSIONES: SOLUCIÓN GENERAL

Si el potencial es una función de dos coordenadas rectangulares únicamente, la ecuación de Laplace puede expresarse como

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (3-29a)$$

Es posible obtener una solución general de esta ecuación por medio de una transformación a un nuevo conjunto de variables independientes. Sin embargo, deberá resaltarse que dicha transformación conduce a una simplificación de la ecuación original solamente en el caso bidimensional. Sea

$$\xi = x + iy, \quad \eta = x - iy$$

donde $i = \sqrt{-1}$ es el número imaginario unidad. En términos de estas relaciones,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

y

$$\nabla^2 \varphi = 4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (3-29b)$$

Es evidente que la solución general a la ecuación (3-29b) es

$$\varphi = F_1(\xi) + F_2(\eta) = F_1(x + iy) + F_2(x - iy) \quad (3-30)$$

donde F_1 y F_2 son funciones *arbitrarias* que son adecuadamente* continuas y diferenciables. Las funciones F_1 y F_2 son cantidades complejas en general, pero se pueden construir dos funciones reales de la siguiente forma. Supongamos primero que $F_2(x - iy) = F_1(x - iy)$, es decir, que las dos funciones F_1 y F_2 dependen del mismo argumento. Entonces,

$$\varphi_1 = F_1(x + iy) + F_1(x - iy) = 2 \operatorname{Re} [F_1(x + iy)]$$

donde Re significa *parte real de*. Por otro lado, la segunda función real del potencial es

$$\varphi_2 = -i[F_1(x + iy) - F_1(x - iy)] = 2 \operatorname{Im} [F_1(x + iy)]$$

donde Im significa *parte imaginaria de*. Por tanto, las partes real e imaginaria de cualquier función compleja $F(x + iy)$ son soluciones de la ecuación de Laplace.

Las soluciones halladas de esta forma no se restringen a un sistema de coordenadas particular. Por ejemplo, los armónicos cilíndricos de la sección 3.7 se obtienen de las funciones complejas† $(x + iy)^n = r^n e^{in\theta}$, y $\ln(x + iy) = \ln r + i\theta$. Por otra parte, cuando es necesario resolver un problema bidimensional particular, no hay un procedimiento establecido para hallar la función compleja adecuada. Este método genera tantas soluciones que no es posible enumerarlas y hay que dejar fuera las que no satisfagan las condiciones en la frontera del problema. En casos sencillos, las funciones necesarias pueden hallarse por ensayo y error; en otros casos, el método de *representación conforme* (que está más allá del alcance de este texto) puede ser útil.

3.9

IMÁGENES ELECTROSTÁTICAS

Para un conjunto dado de condiciones en la frontera, la solución de la ecuación de Laplace es única, de modo que si obtenemos una solución $\varphi(x, y, z)$ por cualquier medio y si esta φ satisface todas las condiciones en la frontera, entonces se ha encontrado una solución completa del problema. El *método de imágenes* es un procedimiento para lograr este resultado sin resolver específicamente una ecuación diferencial. No se aplica universalmente a todos los tipos de problemas electrostáticos, pero un número suficiente de problemas de interés caen dentro de esta categoría, de modo que vale la pena exponer aquí el método.

Supongamos que el potencial puede expresarse en la siguiente forma:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_1(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') da'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3-31)$$

* La función F debe ser "analítica" en el dominio (x, y) de interés. Véase el Apéndice VII, ecuación (VII-3).

† Las coordenadas cilíndricas y rectangulares se relacionan en la forma usual: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

donde φ_1 es ya una función específica o fácilmente calculable y la integral representa la contribución al potencial de la carga superficial sobre todos los conductores que aparecen en el problema. Aquí no se conoce la función σ . Puede suceder, y ésta es la esencia del método de la carga imagen, que el último término de la ecuación (3-31) pueda sustituirse por un potencial φ_2 debido a una distribución de carga *especificada*, generalmente cargas puntuales o lineales. Esto es posible mientras las superficies de todos los conductores coincidan con las superficies equipotenciales de $\varphi_1 + \varphi_2$ combinados. Las cargas especificadas que produce φ_2 se llaman *cargas imagen*. Por supuesto que no existen realmente. Su posición aparente quedará *dentro* de los diversos conductores, y el potencial $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ es una solución válida del problema sólo en la región exterior.

EJEMPLO 3.1

Carga puntual cerca de un plano conductor

Tomaremos ahora algunos ejemplos específicos para demostrar las ventajas del método de la carga imagen. Se destacará que la solución de estos ejemplos sería muy difícil si tuviéramos que utilizar otros métodos analíticos. Consideraremos primero el problema de una carga puntual q colocada cerca de un plano conductor de extensión infinita. Para formular el problema matemáticamente, consideremos el plano conductor de tal forma que coincida con el plano yz , y supongamos que la carga puntual está sobre el eje x en el punto $x = d$ (véase la Fig. 3.3a). El potencial se ajusta a lo indicado en la ecuación (3-31), con

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} \quad (3-32)$$

Solución: Considere un problema diferente, el de dos cargas puntuales (q y $-q$) separadas por una distancia $2d$, como en la figura 3.3(b). El potencial de estas dos cargas,

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad (3-33)$$

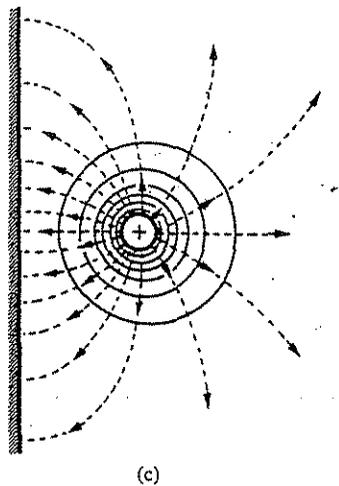
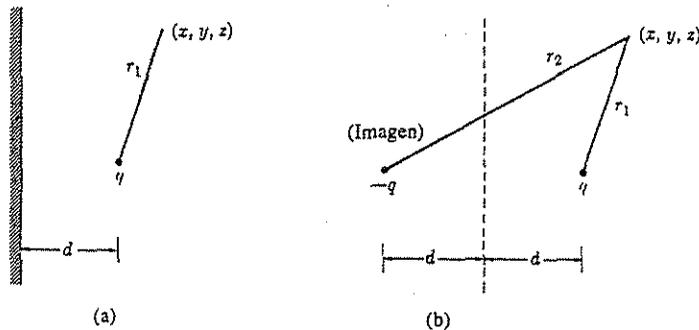
no sólo satisface la ecuación de Laplace en todos los puntos exteriores a las cargas, sino que también se reduce a una constante (es decir, cero) sobre el plano que biseca perpendicularmente el segmento que une las dos cargas. Así pues, la ecuación (3-33) satisface las condiciones en la frontera del problema original. Debido a que las soluciones de la ecuación de Laplace son únicas, la ecuación (3-33) es el potencial correcto en todo el semiespacio del lado derecho del plano conductor. La carga $-q$ da origen al potencial:

$$\varphi_2(x, y, z) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \quad (3-34)$$

Esta carga se llama *imagen* de la carga puntual q . Naturalmente, la imagen no existe en realidad, y la ecuación (3-32) *no da* correctamente el potencial en el interior ni a la izquierda del plano conductor de la figura 3.3(a).

FIGURA 3.3

Problema de una carga puntual y de un plano conductor resuelto mediante el método de la carga imagen: (a) problema original; (b) situación de la carga imagen; (c) líneas de fuerza (líneas punteadas) y superficies equipotenciales (líneas continuas).



El campo eléctrico \mathbf{E} en la región de la derecha del plano conductor puede obtenerse como menos el gradiente de la ecuación (3-33). Ya que la superficie del plano conductor representa una zona interfacial que relaciona dos soluciones de la ecuación de Laplace, a saber, $\varphi = 0$ y la ecuación (3-33), la discontinuidad en el campo eléctrico se tiene en cuenta mediante una densidad de carga superficial σ sobre el plano:

$$\sigma(y, z) = \epsilon_0 E_x|_{x=0} = -\frac{qd}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3-35)$$

Las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales correspondientes al problema original se ilustran en la figura 3.3(c). Éstas son las mismas líneas de fuerza y superficies equipotenciales que corresponden al problema de dos cargas puntuales de la figura 3.3(b), excepto que en este último caso las líneas de flujo continuarían dentro de la parte izquierda del semiplano. De la figura es evidente que *todas* las líneas de flujo eléctrico que normalmente convergen en la carga imagen son interceptadas por el plano en la figura 3.3(c). En consecuencia, la carga total sobre el plano es igual a la de la carga imagen $-q$. Este mismo resultado puede obtenerse matemáticamente integrando la ecuación (3-35) sobre toda la superficie (véase el problema 3.14).

Es evidente que la carga puntual q ejerce una fuerza atractiva sobre el plano, debido a que la carga superficial inducida es de signo contrario. Por la ley de Newton de la acción y la reacción, esta fuerza es igual en magnitud a la fuerza ejercida sobre q por el plano. Puesto que la carga puntual no experimenta ninguna fuerza debida a su propio campo,

$$\mathbf{F} = -q \nabla \varphi_2 \quad (3-36)$$

que es exactamente la fuerza ejercida sobre ella por la carga imagen.

EJEMPLO 3.2
Carga puntual cerca de una esquina que forma un ángulo recto

Otro problema que puede resolverse sencillamente en términos de imágenes es el de determinar el campo eléctrico de una carga puntual q en la vecindad de la intersección de dos planos conductores en ángulo recto (véase la Fig. 3.4a).

Solución: Las posiciones de las cargas imagen necesarias se muestran en la figura 3.4(b). Se ve de inmediato que los dos planos, ilustrados con líneas punteadas en la figura, son superficies de potencial cero debido a los potenciales combinados de q y las tres cargas imagen.

La dificultad principal al resolver un problema por el método de la carga imagen es el de encontrar un grupo de cargas imagen que produzca superficies equipotenciales en los conductores. El problema es directo sólo para casos en los que la geometría es sencilla. Tal es el caso del siguiente ejemplo.

FIGURA 3.4

Carga puntual en una esquina que forma un ángulo recto.

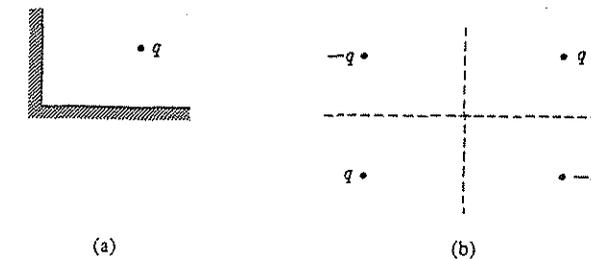
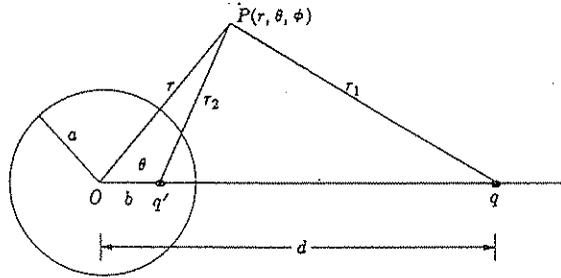


FIGURA 3.5

Carga puntual q en la vecindad de una esfera conductora; q' es la carga imagen.



EJEMPLO 3.3
Carga puntual y esfera conductora

Consideremos el problema planteado por una carga q en la vecindad de una esfera conductora; se requiere una carga imagen sencilla para hacer que la esfera sea una superficie de potencial cero. Se necesita una carga imagen adicional para cambiar el potencial de la esfera a algún otro valor constante.

Solución: Determinaremos primero la magnitud y la posición de la imagen q' que, junto con la carga puntual q , produce un potencial cero en todos los puntos de la esfera. La geometría de la situación se ilustra en la figura 3.5. La carga puntual q está a una distancia d del centro de la esfera y el radio de la esfera es a . Es evidente de la simetría del problema que la carga imagen q' estará en la recta que pasa por q y por el centro de la esfera.

Los resultados deseados se obtienen con mayor facilidad utilizando coordenadas esféricas, con el origen de coordenadas en el centro de la esfera. Sea el eje polar la recta que une q con el origen. La distancia b y la magnitud de q' se han de determinar en función de las cantidades especificadas q, d, a . El potencial en un punto arbitrario P debido a q y q' está dado por

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta, \phi) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}} \right] \end{aligned} \quad (3-37)$$

En la superficie de la esfera, $r = a$ y $\varphi(a, \theta, \phi) = 0$ para toda θ y ϕ . Pero de la expresión (3-37), $\varphi(a, \theta, \phi)$ puede igualarse a cero para toda θ sólo si las dos raíces cuadradas son proporcionales la una a la otra, lo que requiere que $b = a^2/d$, puesto que entonces

$$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta} = \frac{a}{d} \sqrt{d^2 + a^2 - 2ad \cos \theta}$$

En consecuencia,

$$b = \frac{a^2}{d} \quad (3-38)$$

y, además,

$$q' = -\frac{a}{d} q \quad (3-39)$$

Estas ecuaciones son útiles para determinar la posición y la magnitud de la primera carga imagen.

Una segunda carga imagen q'' puede colocarse en el centro de la esfera sin destruir la naturaleza equipotencial de la superficie esférica. La magnitud de q'' es arbitraria; puede ajustarse de modo que esté de acuerdo con las condiciones en la frontera del problema. Con esto hemos encontrado una solución completa para el problema de la esfera conductora con una carga puntual; el potencial en todos los puntos exteriores a la esfera es

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2} + \frac{q''}{r} \right] \quad (3-40)$$

El potencial propio del conductor esférico es

$$\varphi(a, \theta, \phi) = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (3-41)$$

y la densidad de carga superficial sobre la esfera es

$$\sigma(\theta, \phi) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} \quad (3-42)$$

Todas las líneas de fuerza que normalmente convergen sobre las cargas son interceptadas por la esfera. Por tanto, la carga total sobre la esfera, Q , es igual a la suma de las cargas imagen:

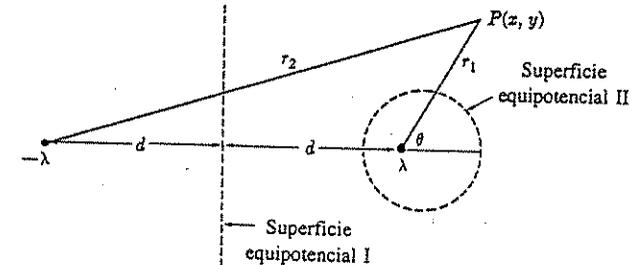
$$Q = q' + q'' \quad (3-43)$$

Este resultado puede verificarse por integración directa de la ecuación (3-42).

Casos especiales de interés son la esfera puesta a tierra: $\varphi(a) = 0, q'' = 0$; y el conductor esférico descargado: $q'' = -q'$.

FIGURA 3.6

Dos líneas de carga infinitamente largas y paralelas (de carga λ y $-\lambda$ por unidad de longitud) se muestran perpendiculares al plano del papel.



3.10 **LÍNEAS DE CARGA Y LÍNEAS IMAGEN**

Hasta ahora, nuestra técnica de imágenes se ha limitado a problemas en los que intervienen cargas puntuales y, en consecuencia, imágenes puntuales. En esta sección consideraremos varios problemas que pueden resolverse por medio de cargas imagen lineales. Consideremos dos líneas de carga infinitamente largas y paralelas, con cargas λ y $-\lambda$ por unidad de longitud, respectivamente, tal como se muestra en la figura 3.6. El potencial en cualquier punto está dado por

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [\ln r_1 - \ln r_2] = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (3-44)$$

donde r_1 y r_2 son las distancias perpendiculares desde el punto hasta las dos líneas de carga. Los equipotenciales se obtienen igualando la ecuación (3-44) a una constante, procedimiento que es equivalente a exigir que

$$\frac{r_1}{r_2} = M \quad (3-45)$$

siendo M una constante. Por tanto, los equipotenciales pueden determinarse con la ecuación (3-45).

El equipotencial que corresponde a $M = 1$ es el plano situado a la mitad de la distancia que hay entre las dos líneas de carga e identificado como la superficie equipotencial I en la figura 3.6. El potencial del plano es cero. En consecuencia, el problema de una línea de carga larga orientada paralelamente a un plano conductor se ha resuelto eficazmente. El potencial en la mitad del espacio está dado correctamente por la ecuación (3-44). Supongamos que la línea de carga mostrada en la parte derecha de la figura es la carga especificada, que está a una distancia d del plano conductor. Entonces la línea de carga del lado izquierdo de la figura desempeña el papel de una imagen. Nuevamente, la carga total sobre el plano es igual a la de la carga imagen.

Consideremos a continuación superficies equipotenciales que corresponden a otros valores de M . La forma general de la superficie puede hallarse expresando r_1 y r_2 en coordenadas rectangulares. Por comodidad, elegimos el origen del sistema coordenado en la línea de carga positiva, y hacemos que esta carga coincida con el eje z ; la segunda línea de carga está colocada en $x = -2d, y = 0$. Ahora

$$x = -2d, y = 0.$$

$$r_1^2 = x^2 + y^2$$

y

$$r_2^2 = (x + 2d)^2 + y^2$$

de modo que la ecuación (3-45) se convierte, después de alguna manipulación algebraica, en

$$x^2 + y^2 - \frac{4M^2xd}{1 - M^2} = \frac{4M^2d^2}{1 - M^2} \quad (3-46)$$

Ésta es la ecuación de un cilindro circular que se extiende paralelo al eje z . Si M es menor que uno, el cilindro rodea la línea de carga positiva como lo hace la superficie equipotencial II de la figura. El eje del cilindro pasa por el punto

$$x = \frac{2M^2d}{1 - M^2}, \quad y = 0 \quad (3-47)$$

y el radio del cilindro es

$$R_c = \frac{2Md}{1 - M^2} \quad (3-48)$$

EJEMPLO 3.4

Cilindro conductor cargado con orientación paralela a un plano conductor

Estamos ahora en posición de resolver varios problemas interesantes en los que intervienen conductores cilíndricos, pero sólo se expondrá uno de este tipo. Consideremos el problema de un conductor cilíndrico largo en la vecindad de un plano conductor y orientado paralelamente a éste. El cilindro tiene carga λ por unidad de longitud. La figura 3.6 puede servir para ilustrar el problema; los dos conductores coinciden con las superficies punteadas.

Solución: Ambas líneas de carga son imágenes, en este caso, y el potencial en la región que rodea al cilindro y que está a la derecha del plano está dado por la ecuación (3-44). Es evidente que la carga inducida sobre el plano es igual a $-\lambda$ por unidad de distancia en la dirección z .

3.11

SISTEMA DE CONDUCTORES Y COEFICIENTES DE POTENCIAL

En las secciones anteriores se han analizado varios métodos importantes para obtener soluciones de la ecuación de Laplace. Aunque son de carácter general, por consideraciones prácticas estos métodos se limitan a problemas en los que los conductores tienen formas más bien sencillas. Cuando sus formas son complicadas, una solución matemática completa en forma analítica queda descartada. Sin embargo, se pueden sacar algunas conclusiones con respecto al sistema simplemente porque el potencial satisface la ecuación de Laplace. De hecho, demostraremos aquí que existe una relación lineal entre el potencial de uno de los conductores y las cargas de los diversos conductores del sistema. Los coeficientes en esta relación, los llamados *coeficientes de potencial*, son funciones sólo de la geometría (específicamente, no dependen ni de las cargas ni de los potenciales) y, aunque no siempre se puedan calcular analíticamente, pueden determinarse numéricamente o a partir de experimentos.

Supongamos que hay N conductores en una geometría fija. Consideremos que todos los conductores están descargados excepto el j , que tiene carga Q_j . La solución adecuada de la ecuación de Laplace en el espacio exterior a los conductores estará

dada por el símbolo $\varphi^{(j)}(y, x, z)$, y el potencial de cada uno de los conductores se indicará mediante $\varphi_1^{(j)}, \varphi_2^{(j)}, \dots, \varphi_j^{(j)}, \dots, \varphi_N^{(j)}$. Cambiemos ahora la carga del j -ésimo conductor a λQ_j . La función $\lambda\varphi^{(j)}(x, y, z)$ satisface la ecuación de Laplace, puesto que λ es una constante; se puede ver del siguiente argumento que las nuevas condiciones en la frontera son satisfechas por esta función. El potencial en todos los puntos del espacio se multiplica por λ . De este modo, todas las derivadas del potencial (y, en particular, el gradiente) están multiplicadas por λ . Como $\sigma = \epsilon_0 E_n$, se sigue que todas las densidades de carga están multiplicadas por λ . Así pues, la carga del j -ésimo conductor es λQ_j y todos los demás conductores permanecen descargados.

Una solución de la ecuación de Laplace que verifica a un conjunto particular de condiciones en la frontera es única; por tanto, tenemos que hallar la solución correcta, $\lambda\varphi^{(j)}(x, y, z)$, para nuestro problema modificado. La conclusión interesante que sacamos de este análisis es que el potencial de cada conductor es proporcional a la carga Q_j del conductor j ; es decir,

$$\varphi_i^{(j)} = p_{ij}Q_j, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3-49)$$

donde p_{ij} es una constante que depende sólo de la geometría.

Se puede aplicar el mismo argumento al caso en el que el conductor k esté cargado: $Q_k = \nu Q_{k0}$, con todos los demás conductores descargados. Aquí la solución adecuada de la ecuación de Laplace es $\nu\varphi^{(k)}(x, y, z)$, donde $\varphi^{(k)}$ es la solución para $\nu = 1$. Es evidente, entonces, que

$$\lambda\varphi^{(j)}(x, y, z) + \nu\varphi^{(k)}(x, y, z) \quad (3-50)$$

es una solución adecuada para el caso en el que ambos conductores estén cargados. Nuevamente, consideremos la unicidad de una solución para un conjunto dado de condiciones en la frontera. Así pues, la ecuación (3-50) es la solución para este caso, y el potencial de cada conductor puede expresarse como

$$\varphi_i = p_{ij}Q_j + p_{ik}Q_k, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3-51)$$

Este resultado puede generalizarse de inmediato al caso en el que todos los N conductores estén cargados:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^N p_{ij}Q_j \quad (3-52)$$

Esta ecuación es la relación lineal entre el potencial y la carga que hemos estado buscando. Los coeficientes p_{ij} se llaman *coeficientes de potencial*. En el capítulo 6 se demostrará que el conjunto de estos coeficientes es simétrico; es decir, que $p_{ij} = p_{ji}$.

3.12 SOLUCIÓN NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE ELECTROSTÁTICA

Nuestros análisis anteriores de las soluciones de la ecuación de Laplace siempre han utilizando sistemas de coordenadas que se han adaptado bien a las condiciones en la frontera, es decir, coordenadas rectangulares para condiciones de frontera

rectangulares, coordenadas cilíndricas para fronteras cilíndricas, etc. No todas las fronteras se ajustan con sistemas de coordenadas convenientes. Además, aun si lo hicieran, puede ser muy difícil satisfacer analíticamente las condiciones en la frontera. Éstas son algunas de las razones por las que las aproximaciones numéricas a soluciones de la ecuación de Laplace son importantes. Aunque el tema tiene una larga historia, ha sido la reciente disponibilidad de computadores digitales a gran escala lo que ha traído un renovado interés en las técnicas numéricas.

De la diversidad de aproximaciones que se han utilizado, predominan dos tipos generales: los métodos de diferencias finitas y los métodos de elementos finitos. Los métodos de diferencias finitas se caracterizan por la superposición de una malla regular sobre la región en la que se desea encontrar la solución. En cada punto de la malla la ecuación de Laplace se aproxima mediante aproximaciones de segundas derivadas. Las ecuaciones algebraicas resultantes se resuelven entonces, generalmente mediante una técnica iterativa, para los valores del potencial en los puntos de la malla. Por otra parte, el método de elementos finitos divide la región (o, en algunos métodos, la frontera de la región) en la que se desea encontrar la solución en subelementos adaptados a las fronteras y que cubren la región sin traslaparse. En cada uno de estos elementos finitos se construye una aproximación analítica sencilla de la solución. Las soluciones son necesarias para satisfacer las condiciones en la frontera y son continuas a través de las fronteras entre los elementos. En la aproximación se dejan algunos parámetros ajustables y estos parámetros se determinan minimizando la energía del sistema. Es un poco difícil seguir esta descripción abstracta, de forma que analizaremos cada método en términos de la solución de la ecuación de Laplace en una dimensión. La ecuación y las condiciones en la frontera son

$$d^2\varphi/dx^2 = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1 \quad (3-53)$$

Esta ecuación ha sido considerada en la sección 3.3. La solución exacta se encuentra fácilmente y es $\varphi(x) = x$. Primero utilizaremos el método de diferencias finitas para encontrar una solución aproximada.

El primer paso es dividir el intervalo desde $x = 0$ hasta $x = 1$ en N segmentos iguales de longitud $1/N$. En el i -ésimo punto divisor, la ecuación de Laplace es aproximada mediante

$$[(\varphi_{i+1} - \varphi_i) - (\varphi_i - \varphi_{i-1})]/(1/N)^2 = 0 \quad (3-54)$$

En los extremos $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$. Las $N - 1$ ecuaciones de la ecuación (3-54) pueden resolverse de forma exacta (la solución es $\varphi_i = i/N$), pero es más común utilizar una técnica iterativa para encontrar una serie de soluciones aproximadas que converjan a la solución exacta. Una de las bases para la iteración es la disposición de la ecuación (3-54) en la forma

$$\varphi_i = \frac{\varphi_{i+1} + \varphi_{i-1}}{2} \quad (3-55)$$

La solución se inicia al suponer un conjunto de valores para las φ_i . Frecuentemente la elección $\varphi_i = 0$ se realiza para todos los puntos interiores y, por supuesto, para los valores específicos en la frontera, $\varphi_0 = 0$ y $\varphi_N = 1$, sobre la frontera. Un nuevo

conjunto de φ_i se calcula mediante la ecuación (3-55), comenzando ya sea en $i = 1$ o en $i = N - 1$ y utilizando siempre el último valor disponible de las φ_i en el lado derecho. Definimos la "diferencia" entre dos iteraciones como el máximo del valor absoluto de la diferencia entre los valores del potencial calculado por las dos iteraciones para todos los puntos de la malla. La iteración se continúa hasta que la diferencia entre las últimas dos iteraciones se reduce a un valor especificado. Este proceso tiene dos inconvenientes: converge muy lentamente, y la diferencia entre las dos últimas iteraciones es una medida cuestionable del error, esto es, la diferencia entre la última iteración y la solución exacta.

La razón de convergencia puede mejorarse mediante "sobrerrelajación". Para efectuar la sobrerrelajación, la ecuación (3-55) se escribe como

$$\varphi_i = w \frac{\varphi_{i+1} + \varphi_{i-1}}{2} + (1 - w)\varphi_i \quad (3-56)$$

donde w es una constante arbitraria diferente de cero. Consideradas como ecuaciones diferentes, la ecuación (3-55) y la ecuación (3-56) son equivalentes. En consecuencia, sus soluciones exactas son idénticas. Sin embargo, cuando la ecuación (3-56) se utiliza como una base para un método iterativo para aproximarse a la solución, es decir, cuando los últimos valores disponibles para las cantidades sobre el lado derecho se utilizan para calcular un nuevo valor para el lado izquierdo, se encuentran variaciones sustanciales en la razón de convergencia y en la precisión de la aproximación.

Utilizando superíndices para seguir la pista a las iteraciones, escribimos la ecuación (3-56) para la $(n + 1)$ -ésima iteración para el valor del potencial en el punto i como

$$\varphi_i^{n+1} = w \frac{\varphi_{i+1}^n + \varphi_{i-1}^n}{2} + (1 - w)\varphi_i^n \quad (3-57)$$

suponiendo que comenzamos con $i = 1$. El valor de w determina la razón de convergencia, y generalmente hay un óptimo preciso. Este óptimo depende de la ecuación que está siendo resuelta, de la frontera, del tamaño de la malla, y del valor del parámetro

de iteración, D_m . Requerimos que la diferencia (como se definió anteriormente) entre las dos últimas iteraciones sea menor que D_m . El valor óptimo de w puede encontrarse a priori en sólo unos pocos casos, pero en general un valor de cerca de 1.5 acelera mucho la convergencia. Aun cuando no hay garantía, el valor de w que produce la convergencia más rápida a veces produce la solución más precisa para un valor dado del parámetro de iteración.

Este procedimiento de iteración es muy fácil de programar, y su realización se deja como un ejercicio de esta sección. Sin embargo, sin considerar los detalles del programa, resulta muy ilustrativo visualizar algunos resultados. Para 10 segmentos, la tabla 3.2 presenta el número de iteraciones necesarias para satisfacer varios criterios de iteración, $\max(|\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n|) < D_m$. Si $w = 1$, se necesita un gran número de iteraciones para satisfacer el criterio aun con $D_m = 0.01$ (un valor relativamente grande). También con $w = 1$ la exactitud (el límite superior de la magnitud de la diferencia entre el valor exacto y el valor calculado) es grosso modo un orden de magnitud peor que D_m . Para $w = 1.5$, que no es el valor óptimo, sólo se necesita un tercio de las iteraciones para satisfacer un criterio de iteración dado, y lo que es más interesante, la exactitud es un orden de magnitud mejor que para el caso de $w = 1$ con el mismo valor de D_m . Si N es más grande, es notable el mejoramiento en la convergencia obtenida al elegir el valor óptimo de w . Por ejemplo, si $N = 50$ y $D_m = 0.001$, se requieren 233 iteraciones con $w = 1$, mientras que sólo son necesarias 52 para $w = 1.9$. En problemas prácticos, la solución exacta es desconocida naturalmente. Debemos confiar en alguna prueba tal como nuestro criterio de iteración para determinar cuándo la iteración ha sido llevada lo suficientemente lejos como para dar la exactitud requerida. Generalmente vale la pena perder un poco de tiempo observando la convergencia numérica antes de tratar de encontrar una solución final a un nuevo problema. La experiencia ayuda y al final de este capítulo se dan algunos problemas con objeto de experimentar.

Consideremos ahora una aproximación de elementos finitos para el mismo problema. Nuevamente queremos resolver el problema con valores en la frontera de la ecuación (3-53), pero esta vez utilizando un método sencillo de elementos finitos. Para poner en marcha el proceso, el intervalo $x = 0$ a $x = 1$ se divide en un número de elementos mediante un conjunto finito de puntos $0 < x_1 \dots < 1$. El número de puntos es arbitrario, como lo es la localización de los puntos. Para nuestro problema, dividamos el intervalo en tres elementos por los puntos x_1 y x_2 . En cada elemento, el potencial se aproxima mediante alguna función conveniente. Las funciones de aproximación no necesitan satisfacer la ecuación de Laplace, pero las que elijamos para este problema lo harán. De hecho, escogemos aproximaciones lineales (que denotamos con u) para el potencial φ :

$$\begin{aligned} u &= b_1 x, & 0 \leq x \leq x_1 \\ u &= a_2 + b_2 x, & x_1 \leq x \leq x_2 \\ u &= a_3 + b_3 x, & x_2 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (3-58)$$

La primera de estas ecuaciones incluye la condición en la frontera $u(0) = 0$. Si pedimos que $u(1) = 1$ y que se igualen los valores de los potenciales en x_1 y x_2 tenemos

TABLA 3.2

Número de iteraciones para satisfacer el criterio de iteración D_m en la aproximación de diferencias finitas para la ecuación de Laplace unidimensional. ($\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1.0$; número de segmentos $N = 10$.)

	$D_m = 0.1$	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$w = 1.0$					
Iteraciones	3	18	41	64	87
Error máx.	0.42	0.087	0.0086	0.00086	0.000085
$w = 1.5$					
Iteraciones	2	9	14	19	25
Error máx.	0.20	0.012	0.0015	0.00017	1.3×10^{-5}

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{u_1}{x_1} \\
 a_2 &= u_1 - \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} x_1, & b_2 &= \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} \\
 a_3 &= u_2 - \frac{u_3 - u_2}{x_3 - x_2} x_2, & b_3 &= \frac{u_3 - u_2}{x_3 - x_2}
 \end{aligned}
 \tag{3-59}$$

Aquí $x_3 = 1$, $u_3 = 1$, y u_1 y u_2 son valores desconocidos. Esta prueba de potencial se presenta en la figura 3.7.

Ahora, sea $\varphi(x)$ la solución verdadera de la ecuación de Laplace y definamos $e(x) = u(x) - \varphi(x)$; es decir, $e(x)$ es el error de la solución aproximada. Ya que $u(x)$ se ha elegido para satisfacer las mismas condiciones en la frontera que $\varphi(x)$, $e(0) = e(1) = 0$. Ahora integremos $(du/dx)^2$ (lo que es igual a $[d(\varphi + e)/dx]^2$) sobre el intervalo 0 a 1:

$$\begin{aligned}
 F &= \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx \\
 &+ 2 \int_0^1 \frac{d\varphi}{dx} \frac{de}{dx} dx + \int_0^1 \left(\frac{de}{dx}\right)^2 dx
 \end{aligned}
 \tag{3-60}$$

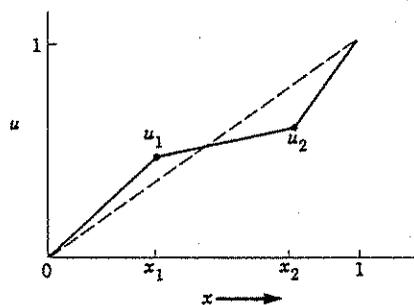
Se demostrará que la segunda integral es 0 escribiendo $(d\varphi/dx)(de/dx) = d/dx[e(d\varphi/dx)] - e d^2\varphi/dx^2$. Como φ satisface la ecuación de Laplace, $d^2\varphi/dx^2 = 0$. El otro término es una diferencial exacta. En consecuencia,

$$\int_0^1 \frac{d}{dx} \left(e \frac{d\varphi}{dx} \right) dx = e \frac{d\varphi}{dx} \Big|_0^1 = 0
 \tag{3-61}$$

ya que $e = 0$ sobre las fronteras. Por tanto, la ecuación (3-60) se convierte en

FIGURA 3.7

Función de prueba para utilizar en el método de elementos finitos para determinar el potencial electrostático.



$$F = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx + \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx
 \tag{3-62}$$

Ahora du/dx es una función de las b , o de manera equivalente, de u_1 y u_2 , mediante las ecuaciones (3-58) y (3-59). Si la integral a la izquierda de la ecuación (3-62) se minimiza variando los parámetros de la función de prueba, entonces la diferencia cuadrática media entre el campo eléctrico $(-du/dx)$ correspondiente a la función de prueba y el campo eléctrico verdadero también se minimizará. En este sentido obtenemos la mejor aproximación a la solución verdadera $\varphi(x)$.*

En el caso sencillo que se está considerando la integral F puede calcularse fácilmente. En términos de las b es

$$\begin{aligned}
 F &= \int_0^{x_1} b_1^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} b_2^2 dx + \int_{x_2}^1 b_3^2 dx \\
 &= b_1^2 x_1 + b_2^2 (x_2 - x_1) + b_3^2 (1 - x_2) \\
 &= \frac{u_1^2}{x_1} + \frac{(u_2 - u_1)^2}{x_2 - x_1} + \frac{(1 - u_2)^2}{1 - x_2}
 \end{aligned}
 \tag{3-63}$$

Al diferenciar con respecto a u_1 y u_2 y al igualar las dos derivadas a cero tenemos dos ecuaciones a partir de las cuales podemos determinar u_1 y u_2 . El resultado es $u_1 = x_1$ y $u_2 = x_2$. En otras palabras, esta aproximación particular de elementos finitos nos da la solución exacta. Esta buena suerte se debe principalmente a la sencillez del problema. Por ejemplo, si hubiéramos utilizado aproximaciones de la forma $u = a + bx^2$ también habríamos encontrado una solución aproximada, pero no habría sido la solución exacta. Si el intervalo hubiera sido dividido en un gran número de elementos (o si las funciones de aproximación tuvieran más parámetros), se habrían tenido que resolver más ecuaciones para las u_i (y otros parámetros) y, en consecuencia, seguramente habríamos tenido que recurrir a un programa numérico para resolverlas. Las dificultades en el problema de elementos finitos son establecer la descomposición de los elementos finitos, encontrar las ecuaciones lineales y resolverlas.

Algunas cosas son evidentes a partir de las consideraciones anteriores acerca de un problema muy sencillo. El problema de las diferencias finitas es más fácil de entender y más fácil de establecer, pero requiere una malla uniforme. Ya que no hay una restricción en el tamaño de los elementos, el método de elementos finitos es más fácil de adaptar a geometrías irregulares, y la malla puede hacerse con facilidad más fina donde el potencial varía rápidamente y más gruesa donde varía más

* Este análisis puede realizarse exactamente de la misma forma en tres dimensiones (utilizando el teorema de la divergencia); en este caso, la cantidad que se minimizará es la integral de $\nabla u \cdot \nabla u$ sobre el volumen del sistema. El análisis también puede hacerse si el valor del potencial se especifica sobre parte de la frontera y el valor del campo eléctrico (derivada normal) se especifica sobre el resto de la frontera.

lentamente. El resultado es una mejor exactitud para una determinada cantidad de cálculos. El método de elementos finitos también da una aproximación analítica al potencial en cada elemento. El método de diferencias finitas da el potencial únicamente en puntos discretos y por lo tanto requiere interpolación u otras aproximaciones para calcular el campo. Sin embargo, debe recordarse que el método de elementos finitos es significativamente más difícil de establecer. Hay mucho más que decir acerca de cada uno de estos métodos y existe una extensa bibliografía acerca de cada uno de ellos.

A continuación consideraremos algunos ejemplos de técnicas numéricas más realistas, aunque todavía relativamente sencillas. Los programas de computador presentados en los siguientes ejemplos utilizan el lenguaje de programación conocido como BASIC. Una breve introducción al BASIC se da en el Apéndice I.

FIGURA 3.8

Región rectangular sujeta a condiciones en la frontera que deben resolverse numéricamente para el potencial electrostático.

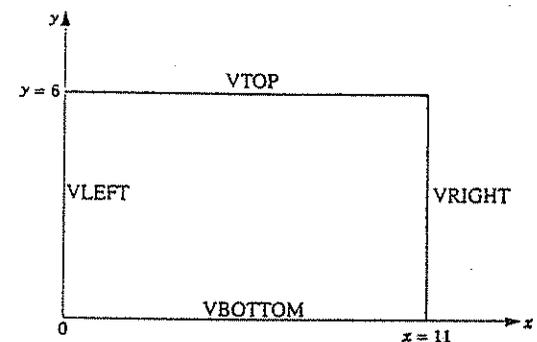


FIGURA 3.9

Programa en BASIC para la aproximación por diferencias finitas bidimensionales a la ecuación de Laplace.

```

100 .....
110 *
120 *          LAPLAC4A SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE EN UN RECTÁNGULO 2D
130 *          LOS NÚMEROS DE LAS LÍNEAS NO SON ESENCIALES
140 *
150 .....
160 'El rectángulo es 7 X 12 incluyendo las fronteras. La malla es de cuadrados de 1 X 1.
170 DIM V (10, 20)
180 CLS : SCREEN 0
190 '
200 'ENTER DATA
210 PRINT 'Introduzca los valores entre 0 y 1 para los potenciales de los 4 lados'.
220 INPUT 'VTOP = ', VT: INPUT 'VBOT = ', VB
230 INPUT 'VLEFT = ', VL: INPUT 'VRIGHT = ', VR
240 PRINT 'Introduzca el valor del parámetro de iteración', DM: INPUT 'DM = ', DM
250 PRINT 'Introduzca el valor para el parámetro de relajación, W: INPUT 'W = ', W
260 '
270 LOCATE 23, 1: PRINT 'Pulse cualquier tecla para continuar'
280 CS = INPUT$(1): CLS : IT = 0
290 '
300 'Introduzca los valores iniciales para el potencial en los puntos de la red y sobre el cuerpo.
310 FOR I = 2 TO 11
320   JP = 6 * J - 6
330   V(I, J) = VT: LOCATE 1, JP: PRINT VT
340   V(I, J) = VB: LOCATE 19, JP: PRINT VB
350 NEXT J
360 FOR I = 2 TO 6
370   V(I, 1) = VL: V(I, 12) = VR: IP = 3 * I - 2
380   FOR J = 2 TO 11: V(I, J) = 0: NEXT
390   LOCATE IP, 1: PRINT V(I, 1)
400   FOR J = 2 TO 12: JP = 6 * J - 6: LOCATE IP, JP: PRINT V(I, J): NEXT
410 NEXT I
420 '
430 'Procedimiento de iteración
440 IT = 0
450 DW = 1
460 WHILE DW > DM
470   IT = IT + 1
480   DW = 0
490   LOCATE 22, 5: PRINT 'Iteración Núm. = ', IT
500   FOR I = 2 TO 6
510     FOR J = 2 TO 11
520       IP = 3 * I - 2: JP = 6 * J - 6: IA = IP + 1
530       VIJ = W * ((V(IA, J) + V(I + 1, J) + V(I, J - 1) + V(I, J + 1))
540         / 4) + (1 - W) * V(I, J)
550       DC = ABS (VIJ - V (I, J)) : 'Valor residual en el punto I, J.
560       IF DC > DW THEN DW = DC: 'Valor residual más grande en una iteración dada.
570       V(I, J) = VIJ
580       LOCATE IP, JP: PRINT USING '####'; V(I, J)
590       LOCATE IA, JP: PRINT USING '####'; DC
600     NEXT J
610 NEXT I
620 WEND
630 LOCATE 22, 25: PRINT '- Valor de DW alcanzando <=: DW
640 LOCATE 21, 1: PRINT 'DM = ': DM, 'W = ': W
650 END
    
```

EJEMPLO 3.5

Potencial en una región rectangular

El problema es encontrar una aproximación al potencial en una región rectangular bidimensional con las fronteras sujetas a potenciales especificados tal como se muestra en la figura 3.8 con VTOP = 1.0 V, VLEFT = 0.3 V, VRIGHT = 0.7 V, y VBOTTOM = 0.0 V.

Solución: Se utilizará el método de diferencias finitas. La ecuación de iteración para este problema es

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \frac{w}{4} [\varphi_{i,j+1}^n + \varphi_{i+1,j}^n + \varphi_{i,j-1}^n + \varphi_{i-1,j}^n] + (1 - w)\varphi_{i,j}^n \quad (3-64)$$

donde los supraíndices indican el número de iteración, y w es nuevamente el parámetro de relajación. El proceso de iteración es fácil de programar y en la figura 3.9 se da un listado (en BASIC) para un programa directo. Las líneas 100 a 250 conforman el encabezado y las líneas para introducir datos. Las líneas 270 a 410 establecen los valores iniciales y los imprimen en la pantalla (se eligió una distribución de 7×12 ya que es la distribución más grande que presentará cuatro cifras significativas para el potencial y las diferencias entre las dos últimas iteraciones sobre la pantalla estándar). Las líneas 430 a 610 son las rutinas de iteración. Dentro del último ciclo, la línea 460 verifica si se satisface el criterio de iteración. Si no, se hace otra iteración. Las líneas 570 a 580 imprimen los valores del potencial y los valores residuales para cada iteración a medida que se ha completado. Si el valor residual más grande, es decir, la diferencia entre las dos últimas iteraciones, es menor que el parámetro de iteración especificado, la línea 630 imprime ese valor. Los resultados obtenidos para un parámetro de iteración 10^{-6} con $w = 1.5$ se muestran en la figura 3.10. Se necesitan solamente 24 iteraciones para alcanzar estos resultados que ciertamente casi satisfacen la diferencia de ecuaciones con un alto grado de exactitud. Desafortunadamente, no hay garantía de que el resultado sea de igual manera una buena

FIGURA 3.10

Potencial en una región rectangular calculado por el método de diferencias finitas (Ej. 3.5).

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
.3	.6269	.7445	.7724	.8146	.8265	.8344	.8405	.8447	.8419	.8140
.3	.4630	.5588	.6105	.6393	.6572	.6706	.6831	.6962	.7088	.7141
.3	.3665	.4170	.4516	.4750	.4923	.5077	.5250	.5484	.5830	.6335
.3	.2859	.2912	.3038	.3169	.3294	.3428	.3607	.3895	.4412	.5370
.3	.1860	.1581	.1553	.1595	.1656	.1735	.1854	.2076	.2555	.3731
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

aproximación a la solución de la ecuación de Laplace. Postergaremos una mayor consideración de este importante resultado hasta más adelante en esta sección.

Los próximos ejemplos utilizan el *método de momentos*, que en muchas formas es similar a la aproximación de elementos finitos, para calcular la distribución de carga sobre un conductor cilíndrico delgado y largo.

EJEMPLO 3.6
Distribución de carga sobre un conductor cilíndrico delgado y largo

El problema es encontrar la distribución de carga en un conductor cilíndrico delgado y largo. Si la carga se sitúa en el conductor, ésta se distribuirá de tal modo que haga que el conductor sea un equipotencial. Si se pudiese determinar esta distribución de carga, el potencial en cualquier punto del espacio podría encontrarse mediante la ecuación (2-15). Es difícil encontrar la distribución de carga por métodos analíticos. En consecuencia, utilizaremos un método numérico generalmente conocido como *método de momentos*, pero también llamado *método de elementos de frontera* y a veces referido como un método de elementos finitos. El cilindro tiene una sección transversal circular de radio a y se extiende a lo largo del eje z . Dividiremos el cilindro en N elementos, cada uno de longitud $2d$ como se presenta en la figura 3.11, y consideramos que $a \ll d$. La carga total sobre el cilindro es Q pero su distribución no es conocida.

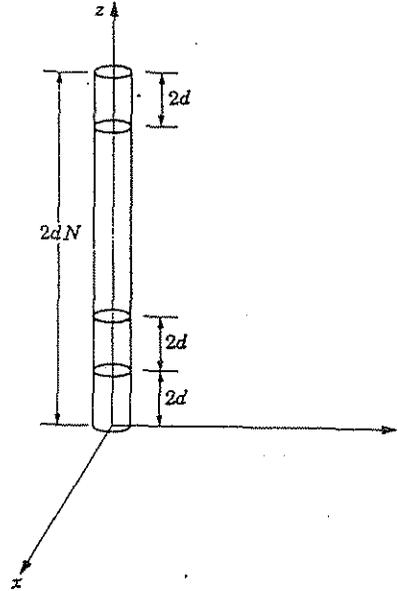
Solución: Denotamos con q_i la carga del i -ésimo elemento y suponemos que se distribuye uniformemente sobre la superficie del elemento. Estas secciones cilíndricas cargadas son los *elementos finitos*, en este caso los *elementos de frontera*, y la función de prueba es el conjunto de los valores de las cargas en los diversos segmentos. Consideremos ahora un elemento colocado en el eje z con su centro en z' (Fig. 3.12). El potencial en un punto z sobre el eje es

$$\varphi(z) = \frac{q'}{8\pi\epsilon_0 d} \int_{z'-d}^{z'+d} \frac{dz''}{\sqrt{(z''-z)^2 + a^2}} \quad (3-65)$$

La transformación $\zeta = z - z''$ convierte la integral en una forma estándar cuyo valor es

FIGURA 3.11

Alambre cargado dividido en N segmentos para realizar los cálculos.



$$\varphi(z) = \frac{q'}{8\pi\epsilon_0 d} \ln \left[\frac{z - z' + d + \sqrt{(z - z' + d)^2 + a^2}}{z - z' - d + \sqrt{(z - z' - d)^2 + a^2}} \right] \quad (3-66)$$

El valor de esta integral en $z = z'$, esto es, la contribución de la carga sobre un elemento a su propio potencial, es aproximadamente

$$\varphi(z') = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 d} \ln \left(\frac{2d}{a} \right) \quad (3-67)$$

donde únicamente se ha conservado el término de orden más bajo en a/d . La contribución de la carga sobre un elemento en z' al potencial en z es (para $z' > z$)

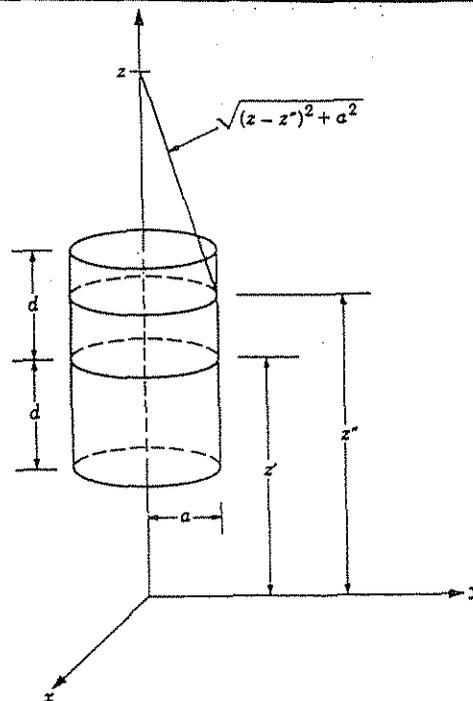
$$\varphi(z) = \frac{q'}{8\pi\epsilon_0 d} \ln \left(\frac{z - z' + d}{z - z' - d} \right) \quad (3-68)$$

donde a se ha considerado despreciable comparada con d . Ahora el potencial del elemento uno puede escribirse como

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 d} \ln \left(\frac{2d}{a} \right) + \frac{1}{8\pi\epsilon_0 d} \sum_{j=2}^N q_j \ln \left(\frac{2j-1}{2j-3} \right) \\ &= \sum_{j=1}^N A_{1j} q_j \end{aligned} \quad (3-69)$$

FIGURA 3.12

Geometría para el potencial producido por un elemento de carga de un alambre largo y derecho. Véase la ecuación (3-65).



El primer término es la contribución de la carga sobre el mismo elemento y el resto de los términos dan la contribución de los otros $N - 1$ elementos.

Para el segundo elemento la forma es la misma, con $A_{22} = A_{11}$ y $A_{2,1} = A_{1,2}$; $A_{2,j} = A_{1,j-1}$ para $j \geq 3$. En otras palabras, la ecuación para ϕ_1 contiene todos los valores para las A_{ij} que aparecen en todas las ecuaciones. Generalizar para los subsiguientes elementos proporciona una útil relación recursiva para calcular los coeficientes de la matriz en las ecuaciones restantes. Además, observamos que por simetría la carga en el elemento j es la misma que la carga en el elemento $(N - j + 1)$. Por tanto, el número de ecuaciones puede reducirse en un factor de dos si N es par o en un factor ligeramente más pequeño si N es impar. Ahora tenemos un conjunto de ecuaciones lineales simultáneas de la forma de la ecuación (I-1) del Apéndice I, con los lados derechos (las D_j) todos iguales al mismo valor. Observe nuevamente que esta igualdad se debe a que estamos considerando una superficie equipotencial (es decir, un conductor).

El programa CYLCON en BASIC, listado en la figura 3-13, utiliza estos resultados para establecer las ecuaciones para las cargas sobre los elementos, suponiendo que el número de elementos es par. Las ecuaciones se resuelven mediante el programa G-J2KA (llamado en la línea 430), que se lista en el apéndice I. Para un alambre de 1.0 metros de largo, 1.0 milímetro de diámetro, a un

FIGURA 3.13

Programa en BASIC para calcular los coeficientes de la matriz para un alambre cilíndrico cargado (Ejemplo 3.6).

```

100 .....
110 *
120 *          CYLCON: PROGRAMA DE CONTROL PARA CALCULAR LA DISTRIBUCIÓN
130 *          DE CARGA EN UN CONDUCTOR CILÍNDRICO - USADO CON G-J2KA
140 *          LA LÍNEA NÚMERO 510 ES ESENCIAL
150 *
160 .....
170
180 *Identificadores:
190 *  L  longitud del alambre
200 *  A  radio del alambre
210 *  N  número de segmentos (pares)
220 *  2D = L/N longitud de segmentos
225 CLS
230 INPUT: "L = ", L:INPUT " A = ", A
240 INPUT: "Número par de segmentos, N = ", N%
250 INPUT: "Arreglo de la dimensión M1>N/2, M1 = ", M1%
260 DIM A(M1%, M1%), D(M1%), W(M1%)
270 N1% = N% / 2: N2% = N% / 2
280 'Ecuación A(I,J) *Q(J) = V(I), V(I) = 1 para todo I
290
300 'Coeficientes calculados, A(I,J)'S
310 FOR I = 1 TO N% / 2
320   FOR J = I + 1 TO N% / 2
330     A(I,J) = (1/2)*(LOG( (J-I+1/2) / (J-I-1/2) ) +
                 LOG( (N%-I-J+3/2) / (N% - I - J + 1/2) ))
340   NEXT J
350   FOR J = 1 TO I - 1
360     A(I,J) = A(J,I)
370   NEXT J
380   A(I,I) = LOG(L/(N1%A))+(1/2)*LOG( (2*(N1%-2*I)+3) / (2*(N1%-2*I)+1) )
390   D(I) = 1
400 NEXT I
410
420 'Solución de las ecuaciones
430 GOSUB 2000
440
450 'Impresión de resultados
460 IF N% / 2 > 20 THEN 510
470 FOR I = 1 TO N% / 2
480   PRINT "Q(I) = " TAB(11):PRINT USING "#.#####": W(I)
490 NEXT I
500 END
510 FOR I = 1 TO 20
520   PRINT "Q(I) = " TAB(11):PRINT USING "#.#####": W(I),
530   PRINT TAB(25) "Q(I + 20) = " TAB(36):PRINT USING "#.#####": W(I + 20)
540 NEXT I
550 END

```

potencial de 1.0 volt, el resultado numérico utilizando 40 elementos se presenta en la tabla 3.3. Este cálculo lleva mucho tiempo aun con un computador rápido, pero recuerdese que se están calculando los 210 elementos de la matriz y que se están resolviendo 20 ecuaciones lineales con coeficientes distintos de cero. Este método no calcula el potencial en cualquier punto y no determina la carga por diferenciación. En cambio, determina la carga directamente. Esta aproximación es particularmente útil para determinar la capacidad de un conjunto de conductores, como se analiza en el capítulo 6. Así mismo, como ya se habrá notado, conocer la distribución de carga hace posible calcular el potencial y el campo eléctrico en cualquier punto del espacio. Este método funciona igual de bien en tres dimensiones como se muestra en el problema 6.28. Como es común con los problemas de elementos finitos, las dificultades residen en establecer las ecuaciones

TABLA 3.3

Solución al problema del alambre cargado (Ejemplo 3.6). ($i = 1$ es un segmento del extremo; $i = 20$ es uno de los segmentos centrales.)

i	q	i	q
1	0.20401	11	0.14614
2	0.17210	12	0.14545
3	0.16340	13	0.14487
4	0.15838	14	0.14440
5	0.15502	15	0.14400
6	0.15256	16	0.14369
7	0.15068	17	0.14344
8	0.14919	18	0.14326
9	0.14797	19	0.14314
10	0.14697	20	0.14309

Nota: El alambre es de 1.0 m de largo y 0.001 m de diámetro, con $N = 40$ segmentos. $D_i = \varphi_i = 1.0$ volt para todas las i . Los valores dados son en realidad $q_i / (4\pi\epsilon_0 d)$; para obtener la carga en cada uno de los segmentos en coulombs, multiplique el valor dado por d (en metros) dividido por 9×10^9 , con $d = \text{longitud}/(2N)$.

✓ y resolverlas. Ninguno de los coeficientes es cero en las ecuaciones para este problema, y por tanto el proceso de resolución es aún más intensivo en los cálculos.

Estos dos ejemplos solamente muestran la superficie. El método de diferencias finitas es lo suficientemente sencillo como para que los programas generales rara vez se vean. Los programas se hacen generalmente a la medida de clases específicas de problemas y de requerimientos específicos de entrada y salida. Una excepción es el programa general de coordenadas rectangulares listado por Koonin,* que se ocupa de una manera muy interesante de fronteras arbitrarias y condiciones en las fronteras arbitrarias. Por otra parte, el método de elementos finitos es difícil de establecer y también requiere la solución de grandes sistemas de ecuaciones lineales. Como resultado, se dispone de muchos programas. Sylvester y Ferrari† listan un número de programas (en Fortran 77) para problemas bidimensionales. Hay también disponibles muchos paquetes comerciales y, de hecho, el método de elementos finitos se ha vuelto tan importante como herramienta de ingeniería de diseño que algunas firmas han desarrollado sus propios programas de computador para sus propósitos.

* Koonin, Steven, J., *Computational Physics*, Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1986, p. 376 ss.

† Sylvester, P. P., y R. L. Ferrari, *Finite Elements for Electrical Engineers*, 2da. ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

No es necesario decir que hay muchas otras aplicaciones valiosas del computador a los problemas de electrostática. Nosotros ilustraremos dos. En el ejemplo anterior, el método de momentos se utilizó para calcular la distribución de carga en un cilindro largo. Teniendo esta distribución de carga, el potencial y el campo eléctrico resultantes pueden calcularse utilizando las ecuaciones (2-15) y (2-8), respectivamente. Para un solo punto, este cálculo implica añadir las contribuciones por separado de cada uno de los elementos, que pueden ser un gran número de ellos, tarea laboriosa que puede resolverse fácilmente con el computador. Encontrar las superficies equipotenciales o líneas de flujo es aún más tedioso, pero con un poco de ingenio estos cálculos pueden también programarse para ser realizados por el computador. De esta forma, el cálculo directo de potenciales y campos es una de nuestras otras aplicaciones. El computador también puede utilizarse para calcular una solución analítica de la ecuación de Laplace como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.7

Cálculo numérico del desarrollo en serie de Fourier del potencial en una región rectangular

El problema es calcular el desarrollo en serie de Fourier del potencial en una región rectangular como se determinó en el problema 3.18. En ese problema se encontró que la solución de la ecuación de Laplace en una región rectangular bidimensional, acotada por las líneas $x = 0$, $y = 0$, $x = 11$ y $y = 6$ sometida a las condiciones en la frontera $\varphi(0, y) = 0$, $\varphi(x, 6) = 0$, $\varphi(11, y) = 0$, $\varphi(x, 0) = 1$, era

$$\varphi(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \frac{\text{sen} \left[\frac{(2i+1)\pi x}{11} \right] \text{senh} \left[\frac{(2i+1)\pi(6-y)}{11} \right]}{\text{senh} \left[\frac{(2i+1)6\pi}{11} \right]}$$

Esta solución es exacta, pero si se requieren valores numéricos para muchos puntos, los cálculos son tremendos.

Solución: Un programa muy corto, presentado en la figura 3.14, calculará el potencial en cada punto sobre la retícula con un intervalo unidad dentro del rectángulo. Los resultados para la suma de los primeros 25 términos en la serie se presentan en la figura 3.15(a).

Es instructivo comparar el resultado obtenido utilizando la serie de Fourier con los resultados obtenidos por el método de diferencias finitas. La región rectangular utilizada en el ejemplo 3.7 es la misma que la que se utilizó antes en el cálculo por elementos finitos, ejemplo 3.5. Por tanto, podemos utilizar el programa de la figura 3.9 para obtener una solución aproximada. El resultado se presenta en la figura 3.15(b). Los valores obtenidos por los dos métodos generalmente están de acuerdo en dos cifras significativas. Esta coincidencia es tranquilizante, pero un poco engañosa. La dificultad es que hemos resuelto, de hecho, dos problemas diferentes con un grado muy alto de aproximación. Las ecuaciones de diferencias finitas son una aproximación a la ecuación de Laplace. En otras palabras, hemos definido un *nuevo problema* que se aproxima al problema de resolver la ecuación de Laplace. La aproximación

FIGURA 3.14

Programa en BASIC para calcular el potencial en puntos sobre una retícula dentro de un rectángulo.

```

100 .....
110 .....
120 * FOUOEF2: POTENCIAL EN UNA REGION RECTANGULAR UTILIZANDO SERIES DE FOURIER
130 * LOS NUMEROS DE LINEAS NO SON ESENCIALES
140 .....
150 .....
160 'La región es 0<=X<=12, 0<=Y<=7; potencial en los límites X =0, X=12, y Y=7
161 'sero; potencial en el límite y=0 es uno.
170 PI = 4*ATN(1)
180 DIM S(50)
190 CLS
200 INPUT "Número de términos menores que 26, M =";M
210 CLS
220 DEF FNSINH(Z) = (EXP(Z)-EXP(-Z))/2
230 FOR Y=6 TO 0 STEP -1
240 FOR X = 1 TO 10
250 S(1) = (4/PI)*SIN(PI*X/11)*FNSINH(PI*(6-Y)/11)/FNSINH(PI*6/11)
260 FOR N = 1 TO M - 1
270 SIN=N) = S(N) + (4/PI)*(1/(2*N+1))*SIN((2*N+1)*PI*X/11)*FNSINH(PI
*(2*N+1)*(6-Y)/11)/FNSINH(PI*(2*N+1)*6/11)
280 NEXT N
290 PRINT USING "#.### "; S(M),
300 NEXT X
310 PRINT
320 NEXT Y
330 PRINT
340 PRINT "Número de términos ="; M
350 END
    
```

FIGURA 3.15

Comparación del potencial aproximado en una región rectangular bidimensional calculado utilizando un desarrollo en serie de Fourier y utilizando un método de diferencias finitas.

		(a) Desarrollo en funciones base										
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0		.0425	.0790	.1062	.1235	.1317	.1317	.1235	.1062	.0790	.0425	0
0		.0915	.1680	.2225	.2559	.2715	.2715	.2559	.2225	.1680	.0915	0
0		.1573	.2801	.3603	.4060	.4264	.4264	.4060	.3603	.2801	.1573	0
0		.2638	.4375	.5324	.5806	.6008	.6008	.5806	.5324	.4375	.2638	0
0		.4844	.6736	.7484	.7813	.7944	.7944	.7813	.7484	.6736	.4844	0
		1.003	1.023	.9933	.9882	1.008	1.008	.9882	.9933	1.023	1.003	
		(b) Método de diferencias finitas										
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0		.0433	.0797	.1063	.1230	.1309	.1309	.1230	.1063	.0797	.0433	0
0		.0935	.1694	.2224	.2547	.2698	.2698	.2547	.2224	.1694	.0935	0
0		.1615	.2818	.3592	.4037	.4237	.4237	.4037	.3592	.2818	.1615	0
0		.2706	.4369	.5292	.5771	.5976	.5976	.5771	.5292	.4369	.2706	0
0		.4842	.6661	.7433	.7781	.7919	.7919	.7781	.7433	.6661	.4842	0
		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

solamente puede mejorarse definiendo otro problema que utilice una malla más fina y que tenga una mayor intensidad de cálculo. La solución mediante la serie de Fourier es exacta si se incluye un número infinito de términos, pero es aproximada si la serie se trunca. En otras palabras, la truncación produce una aproximación a la solución exacta (conocida) del problema especificado. En el caso de las diferencias finitas, aproximamos el problema y resolvemos el problema aproximado con cualquier grado de precisión que se desee. La aproximación con serie de Fourier encuentra una solución exacta y entonces aproxima la solución con cualquier grado de precisión. La diferencia entre aproximar el problema y aproximar la solución exacta con frecuencia es importante cuando se utilizan métodos de cálculo para resolver los problemas.

Para que no se piense que el desarrollo en una serie de funciones ortogonales base es siempre una mejor aproximación, observemos que es muy laborioso obtener un desarrollo en serie para condiciones en la frontera menos fáciles, mientras que en el método de diferencias finitas sólo es necesario meter los valores en la frontera. El resto del trabajo es realizado por el computador. También, en algunas regiones, las series de Fourier convergen de manera extremadamente lenta. La elección del método depende del problema específico y del uso que se dará a la solución.

3.13

SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DE POISSON

En las secciones precedentes hemos tratado exclusivamente con la ecuación de Laplace y su solución. La ecuación de Laplace se aplica a los problemas electrostáticos en los que toda la carga reside en las superficies de los conductores o se concentra en forma de cargas puntuales o líneas de carga. (Veremos en el siguiente capítulo que, si la región entre los conductores está llena de uno o más medios dieléctricos simples, entonces la ecuación de Laplace es válida aun en estos medios.)

Consideremos ahora un problema electrostático en el que parte de la carga (la carga prescrita) está dada por $\rho(x, y, z)$, una función conocida, y el resto de la carga (la carga inducida) reside en las superficies de los conductores. Dicho problema requiere la solución a la ecuación de Poisson. La solución general a este problema puede expresarse como una integral del tipo de la ecuación (3-1) sobre la carga prescrita más una solución general de la ecuación de Laplace. Sin embargo, la solución de la ecuación de Laplace debe elegirse de modo que todo el potencial satisfaga todas las condiciones en la frontera.

Cuando toda la carga es prescrita, es decir, cuando $dq = \rho(x, y, z) dv$ se conoce en todos los puntos del espacio, entonces la ecuación (3-1) representa la solución completa de la ecuación de Poisson, y su integral puede efectuarse (ya sea analítica o numéricamente). No obstante, hay un caso en el que la solución de la ecuación de Poisson puede obtenerse de forma más directa que por medio de la solución formal (3-1); esto sucede cuando tanto ρ como ϕ son funciones de una sola variable independiente. Como ejemplo de este caso, sea ρ una función de la coordenada esférica r únicamente, y supongamos que toda la carga está distribuida en una forma esféricamente simétrica. Entonces la ecuación (3-5b) se convierte en

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(r) \quad (3-70)$$

Supondremos que la carga total está limitada, es decir, ya sea que la carga no se extiende al infinito o que la densidad de carga disminuye de forma suficientemente rápida a grandes radios. La ecuación (3-70) puede entonces integrarse directamente, considerando la función $\rho(r)$ dada, y las dos constantes de integración pueden determinarse a partir de (1) la ley de Gauss para el campo eléctrico para algún radio y (2) el hecho de que $\varphi \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$.

3.14

RESUMEN

Las ecuaciones diferenciales vectoriales fundamentales de primer orden para el campo electrostático, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$, pueden combinarse en una sola ecuación diferencial escalar de segundo orden, la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

donde $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Si $\rho(\mathbf{r})$ es una función dada en una región V , la ecuación de Poisson tiene la solución particular

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

como puede comprobarse si se opera el segundo miembro de esta expresión con ∇^2 dentro de la integral. A esta solución particular puede sumarse cualquier solución de la ecuación homogénea correspondiente, la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

La solución apropiada de la ecuación de Laplace es aquella que satisface las condiciones en la frontera sobre la frontera de V . Si φ o $\partial\varphi/\partial n$ se especifica en una frontera cerrada, la solución es única, aparte de una constante aditiva.

- Si $\rho = 0$ en todo el interior de V , la solución completa es la solución de la ecuación de Laplace que es continua dentro de V y que satisface las condiciones impuestas en la frontera de V . Esta última es $\varphi = \text{constante}_1$, constante_2 , etc., si la frontera está formada por conductores.

- Pueden formarse soluciones analíticas para la ecuación de Laplace mediante combinaciones lineales a partir de un conjunto de funciones base, que se eligen teniendo en cuenta la simetría que presenta el problema particular. El conjunto de los armónicos esféricos es útil para regiones esféricas y simetría azimutal, y los armónicos cilíndricos para regiones cilíndricas.

- El método de imágenes es una técnica en la que se visualiza una configuración ficticia de cargas imagen fuera de V de tal forma que el potencial de estas cargas imagen, más las cargas reales dentro de V , satisfagan las condiciones en la frontera para φ sobre las fronteras dadas de V . El teorema de unicidad asegura que el campo en

el interior de V sea correcto. La técnica puede ser aplicada solamente a unas pocas situaciones en las que la simetría es adecuada. El ejemplo más sencillo es una carga puntual delante de un plano conductor.

- Cuando todas las cargas se encuentran sobre superficies conductoras, la ecuación de Laplace requiere que los potenciales de los conductores sean funciones lineales de sus cargas:

$$\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$$

- Dos métodos útiles para resolver numéricamente la ecuación de Laplace son el método de diferencias finitas y el método de elementos finitos. En el método de diferencias finitas, el potencial se determina en puntos de una retícula en la región por un proceso iterativo; en el método de elementos finitos, la región se divide en subregiones en las que se postulan aproximaciones analíticas que luego son parametrizadas y optimizadas.

REFERENCIAS

Se recomiendan los siguientes textos para (1) una exposición más completa de la ecuación de Legendre, (2) la forma general de la ecuación de Laplace en coordenadas ortogonales y coordenadas curvilíneas, y (3) una exposición más completa de la solución de la ecuación de Laplace:

Mathematical Physics, por E. Butkov, Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1968.

Electromagnetic Theory, por J. A. Stratton, Nueva York, McGraw-Hill, 1941.

An Introduction to Differential Equations and Their Applications, 2da. ed., por S. L. Campbell, Belmont, California, Wadsworth, 1990.

PROBLEMAS

3.1 Dos cáscaras conductoras esféricas de radios r_a y r_b se disponen concéntricamente y se cargan a los potenciales φ_a y φ_b , respectivamente. Si $r_b > r_a$, encuentre el potencial en puntos entre las cáscaras y en los puntos $r > r_b$.

3.2 Dos cáscaras cilíndricas largas de radios r_a y r_b se disponen coaxialmente y se cargan a los potenciales φ_a y φ_b , respectivamente. Encuentre el potencial en puntos entre las cáscaras cilíndricas.

3.3 Si φ_1 es una solución de la ecuación de Laplace, demuestre que la derivada parcial de φ_1 con respecto a una o más de las coordenadas rectangulares (es decir, $\partial\varphi_1/\partial x$, $\partial^2\varphi_1/\partial x^2$, $\partial^2\varphi_1/\partial x\partial y$, etc.) es también una solución.

3.4 Suponga que φ es una solución de la ecuación de Laplace en una región V_0 . (a) Demuestre que el valor de φ en cualquier punto O es el promedio de sus valores sobre la superficie de cualquier esfera centrada en O que esté contenida totalmente en V_0 :

$$\varphi(O) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint \varphi da$$