LAS CÓNICAS Y SUS APLICACIONES

Pedro Alegría (pedro.alegria@ehu.es)

Además de las rectas, círculos, planos y esferas que conoce cualquier estudiante de Euclides, los griegos sabían las propiedades de las curvas que se obtienen al cortar un cono con un plano: la elipse, la parábola y la hipérbola. Kepler descubrió al analizar sus observaciones astronómicas -y Newton lo demostró matemáticamente sobre la base de la ley universal de la gravitación- que los planetas describen elipses. Así se hizo de la geometría de la Grecia antigua piedra angular de la astronomía moderna.

J. L. Synge (1897-1995)

ÍNDICE

1. ORIGEN DE LAS CÓNICAS.

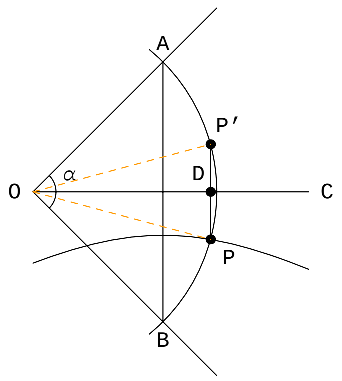
Como ha sucedido en numerosas ocasiones, importantes creaciones en matemáticas no tuvieron un origen que pronosticara su relevancia posterior. Uno de estos casos es el de las conocidísimas cónicas, en un principio estudiadas casi por simple diversión, pero de tan variadas aplicaciones en muchas ramas de la ciencia. Como es sabido, fue Apollonius de Perga, en el siglo III a.C. el primero que las introdujo públicamente, escribiendo el más importante tratado antiguo sobre las secciones cónicas, aunque ya en el siglo anterior Menaechmus había escrito el primer tratado sobre cónicas. Lo que no es tan conocido es que el motivo que originó esta cración no fue precisamente el de explicar las órbitas de los planetas ni construir aparatos de radar, sino el de buscar soluciones sólo con regla y compás de los tres famosos problemas griegos que hoy sabemos irresolubles, como son el de la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo.

Durante muchos siglos, las cónicas fueron descartadas en los trabajos de los matemáticos hasta que volvieron súbitamente a la vida, al comprobarse que el mundo que nos rodea está lleno de secciones cónicas. En la elipse encontró Kepler la respuesta al enigma del movimiento planetario, descubriendo que el planeta Marte (ahora sabemos que al igual que el resto de los planetas) tiene órbitas elípticas y el sol está situado en uno de sus focos (de ahí el nombre dado a estos puntos). En base a este descubrimiento Newton enunció la famosa ley de la gravitación universal; así el descubrimiento de Kepler se deduce como consecuencia matemática de dicha ley. También los satélites y los cometas tienen órbitas elípticas, de mayor o menor excentricidad, lo cual es es en cierto modo providencial, pues si se tratara de hipérbolas o parábolas, no volverían a repetir su ciclo. Así mismo, Galileo demostró que las trayectorias de los proyectiles son parabólicas.

1.1. Trisección de un ángulo.

Hoy en día, la propiedad menos importante de estas curvas, en vista de su utilidad para el mundo matemático, es precisamente que cierto par de parábolas permite la duplicación del cubo y cierta hipérbola permite trisecar un ángulo. Como la belleza no está reñida con el interés, veremos con cierto detalle esta última construcción, desechada por los mismos griegos, debido a que las mismas cónicas no se pueden construir con regla y compás.

Sea α un ángulo arbitrario. Se construye la circunferencia de centro O y radio $OA = OB$ de modo que $\widehat{AOB} = \alpha$. Sea la recta OC bisectriz de α. Con OC como directriz y B como foco, se construye una rama de hipérbola de excentricidad $e = 2$. Sea P el punto de intersección de la hipérbola con el arco de circunferencia AB. Análogamente se obtiene el punto P' utilizando A como foco. La situación actual se representa en la figura siguiente:



Por definición de hipérbola, $BP = 2PD$ y $AP' = 2DP'$ (ver sección 2.3). Además, debido a la simetría, $PD = DP'$. En definitiva, resulta que $BP = PP' = P'A$ y queda así trisecado el ángulo α.

1.2. Duplicación del cubo.

La leyenda afirma que el rey Minos de Creta había ordenado erigir a su hijo una tumba en forma de cubo y que, por negligencia del constructor, resultó demasiado pequeña. Hubo necesidad de demoler el cubo de mármol de 100 pies de arista y sustituirlo por otro de volumen doble.

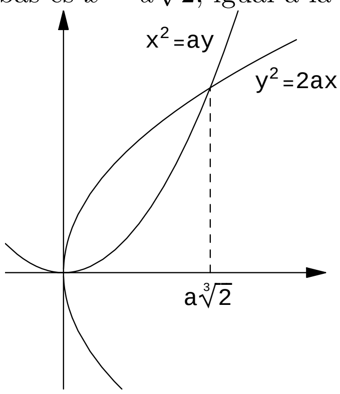
Una segunda leyenda clásica afirma que el oráculo de Delos aconsejó a los atenienses que, para aplacar al dios Apolo, cuyo altar en Delos tenía forma cúbica, le levantaran un nuevo altar cúbico de volumen doble. Como los geómetras se demostraron incapaces de resolver el problema, se recurrió a Platón, quien alegó que los dioses habían pensado, más en la duplicación del cubo en sí, en excitar el interés por el estudio de la Geometría en general.

En todo caso, es un hecho histórico que el problema de Delos halló ya en la antigüedad diversas soluciones constructivas, aunque desde luego ninguna con el uso exclusivo de la regla y el compás, porque si llamamos a a la arista del cubo original y x a la del cubo duplicado, el problema se reduce a resolver la ecuación $2a^3 = x^3$ y es un hecho conocido entre los matemáticos que las ecuaciones de grado mayor que dos en general no se pueden resolver geométricamente (es decir, con el uso exclusivo de regla y compás).

Como nuestro interés aquí es mostrar el uso de las cónicas en la resolución gráfica de dicho problema, daremos la solución conseguida por Hipócrates de Chios en el siglo V a.C. mediante la intersección de dos parábolas.

Con la notación actual y el uso de la Geometría Analítica, la solución de Hipócrates sería la siguiente:

Sean las parábolas de ecuaciones $x^2 = ay$, $y^2 = 2ax$. Es muy sencillo comprobar que la abscisa del punto de intersección de ambas es $x = a\sqrt[3]{2}$, igual a la arista del cubo doble.



Observamos así cómo problemas sin aparente importancia para nosotros dan lugar a creaciones -como son las cónicas- de uso tan generalizado y de aplicaciones tan diversas en nuestros días.

2. DISTINTAS DEFINICIONES DE CÓNICA.

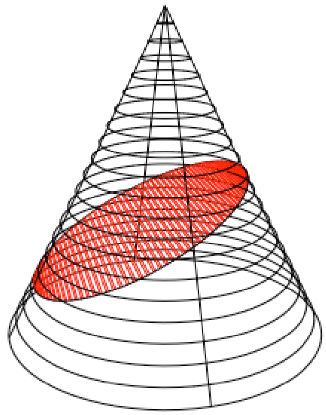
Distintos puntos de vista pueden considerarse para proporcionar una definición de las cónicas, desde el clásico donde una cónica es la sección obtenida al cortar un cono por un plano, hasta la analítica donde una cónica es el lugar geométrico de los puntos que verifican una determinada relación de distancias. Ya estas definiciones permiten adelantar algunas propiedades que serán de utilidad en las aplicaciones.

2.1. Punto de vista histórico.

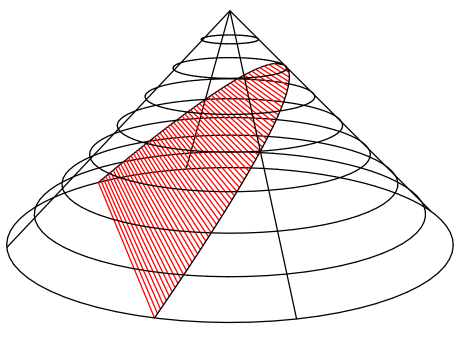
Históricamente, las cónicas deben su nombre a su obtención mediante diferentes secciones de un cono circular recto. En este caso tenemos dos opciones:

a) Secciones perpendiculares a una generatriz, para diferentes conos:

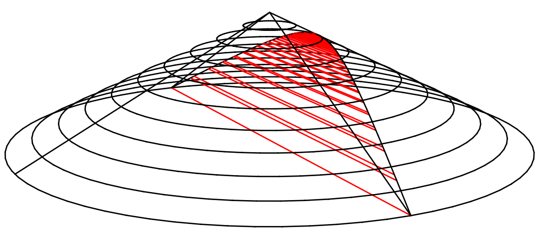
Si denotamos por α al ángulo formado por dos generatrices diametralmente opuestas, tenemos los siguientes casos:



α agudo: elipse

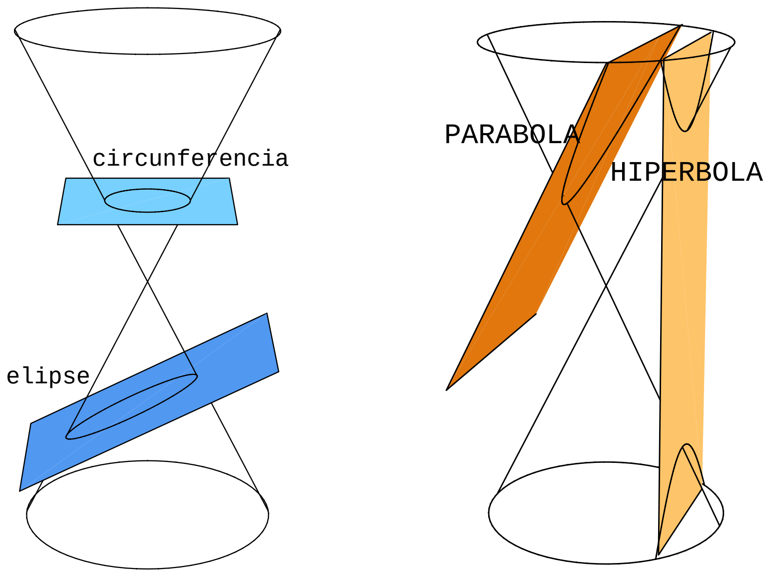


α recto: parábola

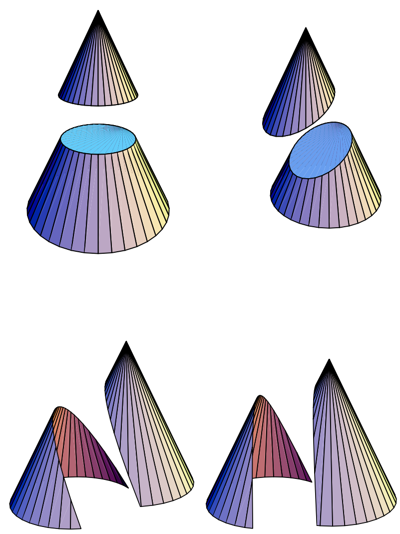


α obtuso: hipérbola

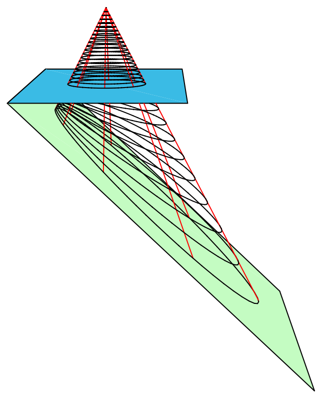
b Distintas secciones de un mismo cono.

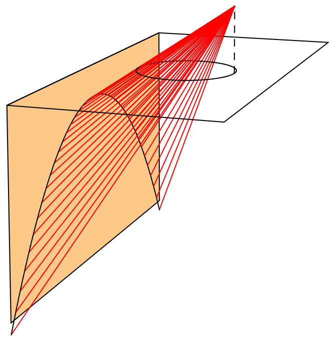


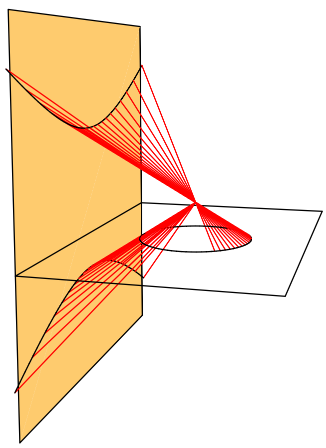
Se observa que si el plano atraviesa el cono paralelamente a su base, la sección es un círculo. Inclinando ligeramente el plano con respecto a la base, la sección resulta ser una elipse. Cuanto más inclinado esté el plano, más alargada resulta la elipse (tiene mayor excentricidad). Se podría esperar que al aumentar la inclinación del plano, al ser más ancho el cono, la sección tendría forma de pera; sin embargo, siempre es una elipse perfecta hasta que el plano es paralelo a una generatriz del cono. Desde este momento, la curva ya no será cerrada, y en este caso se trata de una parábola. Al inclinar más el plano, se obtiene una de las ramas de una hipérbola (la otra sale al colocar otro cono opuesto por el vértice al anterior). Finalmente, si el plano pasa por el vértice del cono, la sección degenera en una o dos rectas.



2.2. Punto de vista proyectivo.





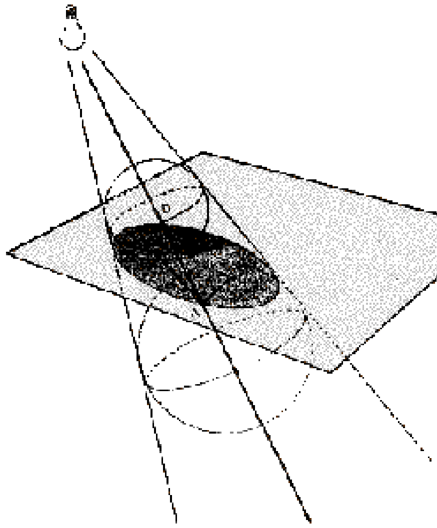


Desde un punto exterior al plano de una circunferencia, la proyección de la misma sobre un plano inclinado es una elipse.

Si proyectamos desde un punto situado en una recta perpendicular al plano de la circunferencia y que pase por un vértice de la misma sobre un plano perpendicular al de la circunferencia y diametralmente opuesto al vértice dado, se obtiene una parábola.

En las mismas condiciones anteriores, si el pie de la perpendicular desde el punto hasta el plano de la circunferencia cae en el interior del círculo, la figura proyectada es una hipérbola.

Observemos la relación entre ambas definiciones: La luz emitida desde un punto fijo tiene forma cónica. Si situamos un punto de luz en el vértice de un cono, la sombra reflejada por una esfera inscrita en el cono tendrá forma de elipse si colocamos una pantalla en un plano inclinado del cono, cuya excentricidad irá creciendo a medida que inclinemos más dicho plano.



(esferas de Dandelin)

2.3. Punto de vista analítico.

También en este caso, podemos distinguir dos definiciones. Una de ellas es común para las tres cónicas, y la otra varía según la cónica de que se trate.

a) Mediante la excentricidad. **Lugar geométrico de los puntos P cuya distancia OP a un punto fijo, llamado *foco*, es e veces su distancia PK a una recta fija, llamada *directriz*, donde e es una constante positiva, llamada** *excentricidad* (definición dada por Pappus de Alejandría o Euclides)

$$\text{CÓNICA } = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P,O) = e \cdot d(P,K)\},\ e \geq 0.$$

Así, se llama elipse si $e < 1$ (en particular, si $e = 0$, se llama circunferencia), parábola si $e = 1$ e hipérbola si $e > 1$ (los nombres son debidos a Apolonio).

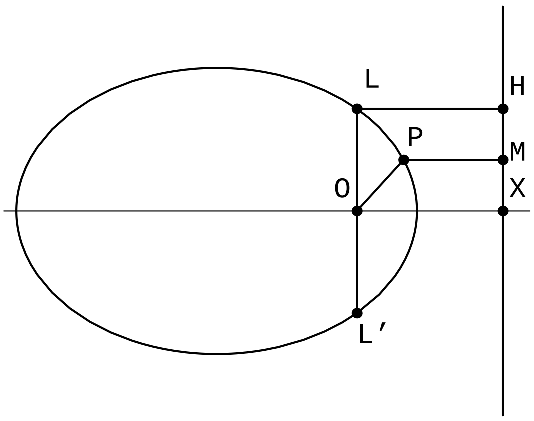
Ecuación:

- En coordenadas polares: $r = OP = e \cdot PK = e(LH - r\cos\vartheta) = OL - e \cdot r \cdot \cos\vartheta$.

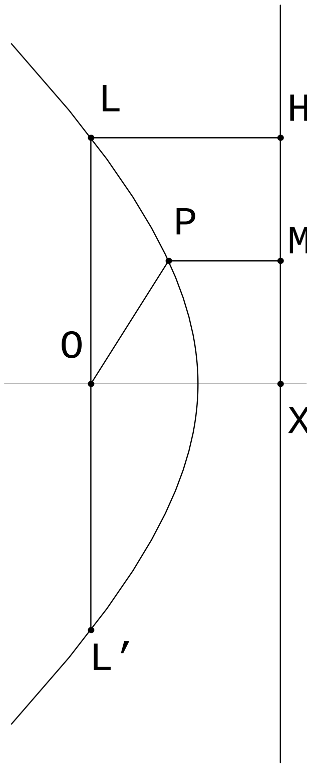
Como la ecuación no se altera al sustituir ϑ por $-\vartheta$, la cónica es simétrica respecto a OX.

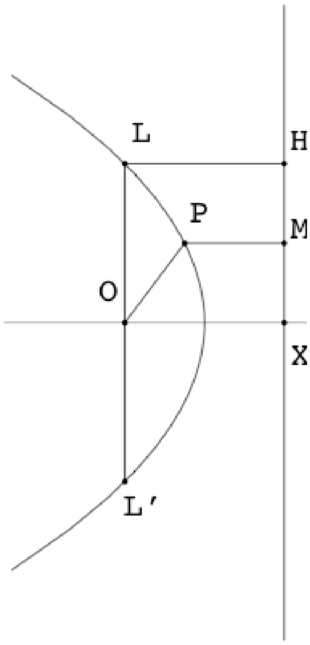
- En coordenadas cartesianas: $x^2 + y^2 = (OL - e \cdot x)^2$.

(Esto indica que la circunferencia es una cónica de excentricidad $e = 0$.)

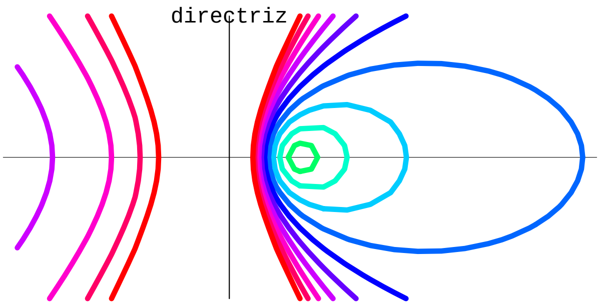


ELIPSE





HIPÉRBOLA PARÁBOLA



La elipse y la hipérbola son simétricas por reflexión en cualquiera de sus ejes y, por tanto, por el giro de 180 grados alrededor de su centro (su grupo de simetría es D_2, el generado por las reflexiones respecto a cada uno de sus ejes).

b) Mediante los focos. **Una elipse es el conjunto de puntos cuya suma de distancias a otros dos puntos fijos, llamados *focos* es constante.**

$$\text{ELIPSE } = \{P \in \mathbb{R}^2 : d(P,F) + d(P,F') = 2a\}.$$

Una hipérbola es el conjunto de puntos cuya diferencia de distancias a otros dos puntos fijos es constante.

$$\text{HIPÉRBOLA } = \{P \in \mathbb{R}^2 : |d(P,F) - d(P,F')| = 2a\}.$$

Resumiendo lo anterior, mostramos en la siguiente tabla las ecuaciones canónicas (donde los ejes de coordenadas son los ejes de simetría de la elipse y la hipérbola) de las distintas cónicas, tanto en su forma implícita como en su forma paramétrica.

NOMBRE	**ECUACIÓN IMPLÍCITA**	**ECUACIONES PARAMÉTRICAS**
Elipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b \operatorname{sen} t \end{array}\right\}, 0 \leq t < 2\pi$
Hipérbola	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\left.\begin{array}{l} x = a\, ch\, t \\ y = b\, sh\, t \end{array}\right\}, -\infty < t < \infty$
Parábola	$y^2 = 2px$	$\left.\begin{array}{l} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{array}\right\}, -\infty < t < \infty$

3. CONSTRUCCIÓN DE CÓNICAS.

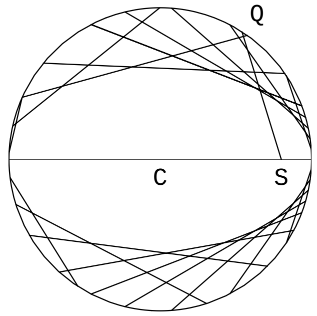
Hay varias formas, a cada cual más ingeniosa, de construir una cónica, aprovechando las diferencias entre cada una de las definiciones indicadas anteriormente.

Veamos en primer lugar a las cónicas como envolventes de familias de rectas (que han dado lugar a creaciones artísticas de distintos tipos):

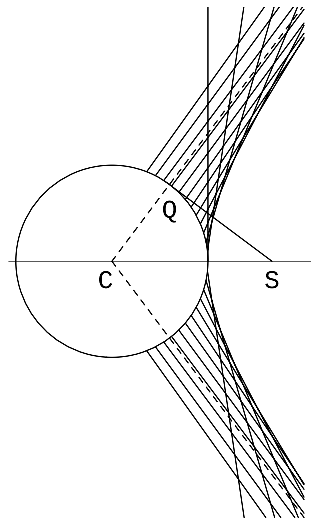
Si entendemos que la envolvente de una familia de rectas es una curva regular que es tangente en cada punto a uno de los elementos de la familia dada, sin ser ella un miembro de la familia (definición debida a Stokes), los siguientes diagramas muestran a cada una de las cónicas obtenidas de esta forma.

Este método de las envolventes ha atraído la atención de los artistas desde hace relativamente poco tiempo, quienes han fabricado figuras por medio de hilos de color unidos en clavos sobre una tabla.

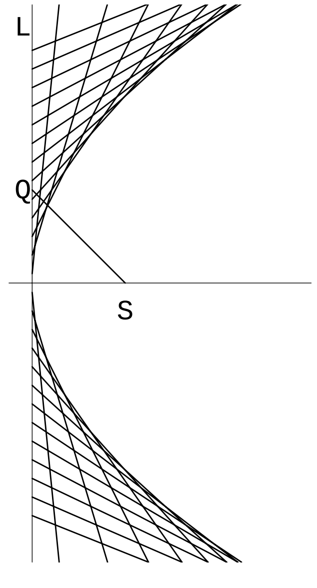
ELIPSE. Dibujamos un círculo de centro C y un punto S en el interior del círculo. Desde cualquier punto Q de la circunferencia se traza la perpendicular a SQ. El conjunto de dichas rectas envuelve a un elipse. Cuanto más cerca esté S de C, más parecida a una circunferencia será la elipse obtenida (menor será su excentricidad).



HIPÉRBOLA. Se dibuja un círculo de centro C y un punto S exterior a la circunferencia. Se traza la perpendicular a SQ, para cualquier punto Q de la circunferencia. La familia de rectas obtenida es la envolvente de una hipérbola. Las perpendiculares CA y CB a las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por S son las asíntotas de la hipérbola, rectas a las que la hipérbola se acerca en el infinito.



PARÁBOLA. Dibujamos una recta cualquiera L y un punto S no situado en ella. Desde cualquier punto Q de la recta trazamos la perpendicular a SQ. Una cantidad suficiente de rectas así construidas envuelven a una parábola con foco en el punto S.



OTROS MÉTODOS.

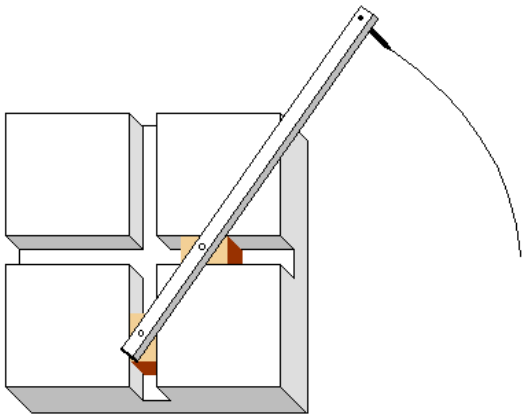
Se clavan dos chinchetas en una hoja de papel y se las rodea con un bucle de hilo, el cual se mantiene tenso con la punta de un lápiz. Al mover el lápiz alrededor de las chinchetas, está claro que la suma de las distancias de la punta del lápiz a las chinchetas es constante (la longitud del hilo), de modo que se obtiene la figura de una elipse. Cuanto más próximas estén las chinchetas, más parecida a una circunferencia será la figura (menor será su excentricidad).

El elipsógrafo consiste en un recipiente circular y un disco también circular de diámetro la mitad del anterior. Abriendo un hueco en cualquier lugar del disco y atravesándolo con un lápiz, al girar el disco alrededor del recipiente (sin deslizarlo) el lápiz trazará una elipse.

Mediante dobleces de un papel se obtienen los contornos de las cónicas. Por ejemplo, si en una hoja se dibuja una recta y un punto fuera de ella, se dobla el papel de modo que la recta se sitúe sobre el punto y se marca el doblez. Al hacerlo varias veces se obtiene la envolvente de la parábola.

Si recortamos una hoja de papel en forma circular y se dibuja en ella un punto cualquiera, al doblar la hoja de forma que dicho punto coincida con un punto de la circunferencia, se obtiene un conjunto de rectas que son la envolvente de una elipse cuyos focos son el punto dado y el centro de la circunferencia. Doblando el papel de forma similar al caso de la elipse, pero situando el punto fijo en el exterior del círculo se puede construir una hipérbola.

En la figura siguiente se muestra otro dispositivo para construir una elipse. La pieza móvil se desliza a lo largo de las ranuras colocadas perpendicularmente. Se deja al lector la comprobación de que, efectivamente, estos procedimientos dan las figuras indicadas.



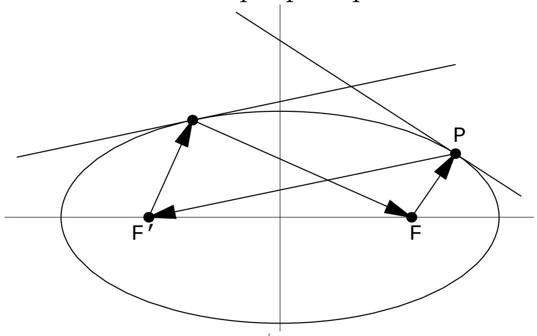
(compás elíptico)

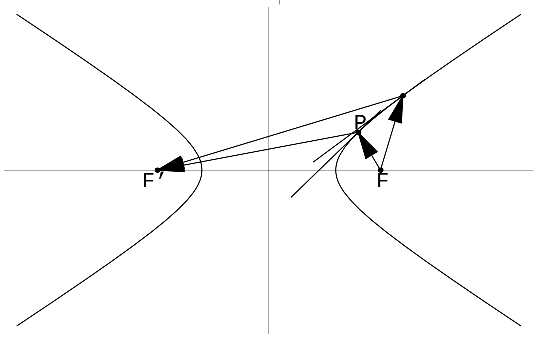
4. PROPIEDADES REFLEXIVAS.

Es bien conocida la utilidad de las parábolas en la construcción de radares, antenas parabólicas y espejos. Daremos a continuación una idea de las propiedades que permiten a las cónicas tener utilidades de ese tipo.

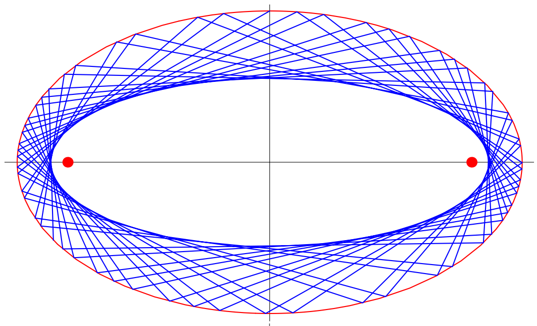
Tracemos la recta tangente a cualquier cónica en cualquiera de sus puntos. En el caso de la elipse y de la hipérbola, tracemos además las rectas que unen dicho punto con los focos. Entonces se demuestra que los ángulos (agudos) que forman esas dos rectas con la recta tangente son iguales.

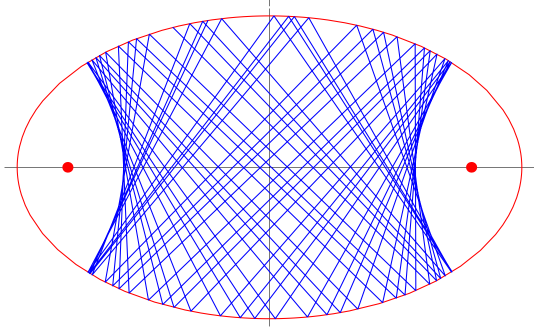
Otra forma de expresar este hecho es que, si se dirige un rayo partiendo de uno de los focos, al reflejarse en la figura sigue en una dirección que pasa por el otro foco.

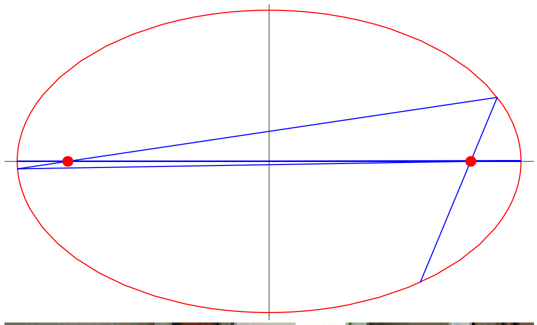




Un hecho curioso basado en esta propiedad es el siguiente: imaginemos una mesa de billar en forma elíptica. Si colocamos una bola en un foco y la lanzamos en cualquier dirección, la bola rebotará en la banda y pasará por el otro foco. Si suponemos que sigue rebotando, irá pasando sucesivamente por uno y otro foco. Al cabo del tiempo, la trayectoria se confundirá con el eje mayor de la elipse. Si la bola no está en ningún foco y se lanza según una dirección que no pasa entre ellos, los segmentos que describen la trayectoria forman la envolvente de otra elipse más pequeña con los mismos focos. Si, por el contrario, se lanza según una dirección que pase entre los focos, describirá una trayectoria que es la envolvente de una hipérbola con los mismos focos.







En tres dimensiones, un efecto interesante consiste en diseñar una sala con techo elipsoidal (de revolución). Emitiendo un sonido desde uno de los focos, ese sonido se oirá con toda nitidez desde el otro foco (las ondas sonoras rebotan en las paredes y se reflejan en el otro foco; incluso el tiempo que tardan es el mismo, sea cual sea la dirección inicial). Una “cámara de eco”famosa se encuentra en el edificio del Capitolio en Washington. Este efecto permite también la insonorización de habitaciones.

La propiedad reflexiva de las hipérbolas se usa también en lentes telescópicas. Una aplicación interesante permite conocer la posición de un barco en alta mar. A grandes rasgos, es la siguiente:

Loran, abreviatura de la expresión long range navigation (navegación de largo alcance), correspondiente a un sistema de navegación por radio desarrollado durante la II Guerra Mundial. Loran es uno de los muchos sistemas que permiten a los navegantes determinar la posición de su barco o avión, a partir de la diferencia de recepción de las señales de radio procedentes de dos emisores sincronizados distantes entre sí. El sistema emisor loran se compone de una estación maestra y otra esclava. La maestra emite cada 0,05 segundos una pequeña señal, que es repetida por la esclava, controlada por radio desde la maestra, 0,001 segundos más tarde. Ambas señales se reciben en el barco o avión, se amplifican y se registran como pequeñas ondas sobre la pantalla de un tubo de rayos catódicos. Los circuitos del receptor están dispuestos de forma que la distancia entre las señales corresponda a la diferencia de tiempos de llegada de las señales de ambas estaciones. El receptor posee además un dispositivo temporizador electrónico que permite medir dicha diferencia en microsegundos (millonésimas de segundo). Como las ondas de radio viajan a una velocidad constante de 300,000 km por segundo, la ubicación de todos los puntos en los que las señales de las dos estaciones están separadas un determinado intervalo de tiempo se puede representar mediante una curva concreta que es una hipérbola, cuyos focos se encuentran en ambasa estaciones emisoras. El navegante dispone de un mapa con muchas de estas curvas, denominadas curvas de posición loran, y tras determinar la diferencia de tiempos, por ejemplo, 3 microsegundos, sabe que la posición de su nave se halla en algún punto de la curva de 3 microsegundos del mapa. Sintonizando una pareja de emisores loran y repitiendo este proceso, el navegante es capaz de detectar otra curva que represente la posición de la nave; la posición real del aparato se halla en la intersección de las dos curvas loran. Loran posee un alcance útil de unos 2,250 km por la noche y unos 1,200 km de día. Las señales se emiten generalmente en la banda de frecuencias de $1,8$ a $2,0$ MHz. Sirve tanto para marcar y mantener un rumbo, como para fijar la posición, y presenta la ventaja de ser independiente de las condiciones meteorológicas. Su exactitud oscila entre unos centenares de metros y unos pocos kilómetros, dependiendo del equipo utilizado y de la distancia entre la nave y la emisora.

Veamos entonces el funcionamiento. Supondremos que la estación maestra se encuentra en el origen de coordenadas y las esclavas están 600 Km. al norte y 600 Km. al este, respectivamente. Si el retraso entre la llegada de la señal original y la emitida en la estación N (al norte) es δt milisegundos, el barco está en algún punto de la hipérbola de ecuación

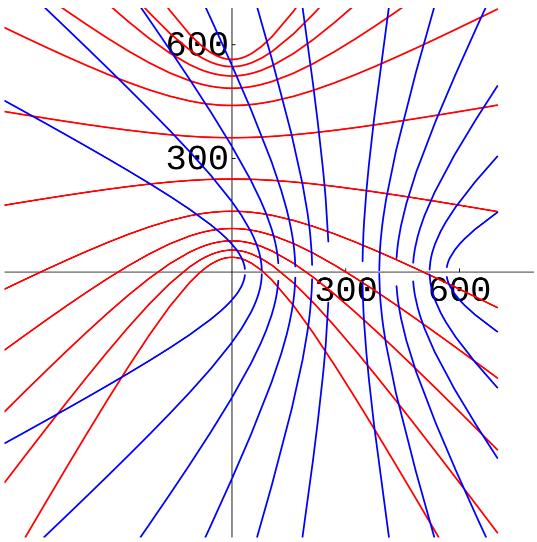
$$\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2+(y-600)^2}=295(\delta t+1)$$

(las señales de radio viajan a una velocidad de 295 Km. por milisegundo).

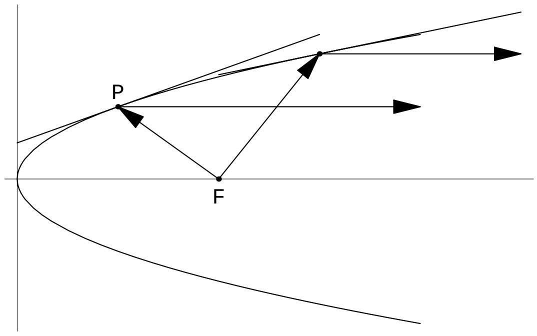
Supongamos que δt es el tiempo de llegada de la señal maestra menos el tiempo de llegada de la señal auxiliar. Esto quiere decir que δt es positivo si el barco está más próximo a la estación auxiliar que a la principal, etc. A su vez, el barco se encuentra sobre la hipérbola

$$\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{(x-600)^2+y^2}=295(\delta s+1),$$

donde δs es el tiempo en que la señal llega de la estación principal menos el tiempo en que llega de la estación situada al este. El barco se encuentra pues en la intersección de ambas hipérbolas.



- En el caso de la parábola, la propiedad análoga es la siguiente: si se traza la recta tangente en cualquier punto y la recta que une dicho punto con el foco, el ángulo que forma la recta tangente con dicha recta coincide con el que forma la recta tangente con la recta paralela al eje de la parábola.



El paraboloide es una superficie que se obtiene al girar una parábola alrededor de su eje. Los espejos parabólicos tienen forma de paraboloide, y se usan principalmente en la construcción de telescopios y antenas: los rayos de luz recibidos desde una fuente lejana (como las estrellas) viajan paralelos al eje de la parábola y se reflejan para converger en el foco de la misma. Inversamente, cuando la fuente de luz está en el foco, los rayos de luz se reflejan y viajan paralelos al eje de la parábola. Este es el principio usado en los faros de los automóviles, proyectores y radares.

5. LOS ÓVALOS.

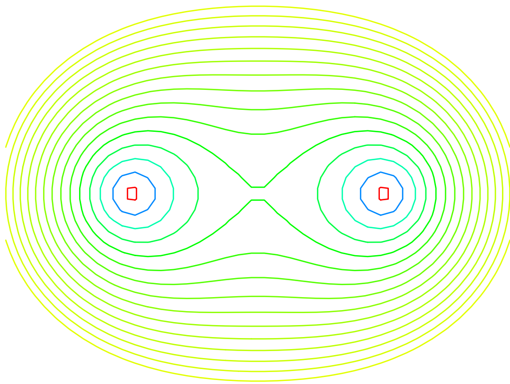
El director del Observatorio Astronómico de París en la época de Luis XIV era Giovanni Cassini, quien (en 1680) pensaba que la órbita aparente del sol alrededor de la tierra era un óvalo, figura descrita por la condición $PA \times PB =$ constante. Ya en la época eran conocidas las curvas descritas por las condiciones análogas

$$\begin{aligned} PA + PB &= \text{constante: elipse,} \\ PA - PB &= \text{constante: hipérbola,} \\ PA/PB &= \text{constante: circunferencia.} \end{aligned}$$

Estas curvas están definidas por una ecuación de grado cuatro y la gráfica que tienen varía según la relación entre la constante y la distancia entre los puntos dados.

Así por ejemplo, si $d(A, B) = 2a$ y $PA \times PB = k^2$, entonces:

- Si k es mucho mayor que a, el óvalo es casi una circunferencia.
- Si $k > a$, el óvalo se alarga pero se estrecha por el centro.
- Si $k = a$, el óvalo pasa por el punto medio de A y B y forma la llamada lemniscata de Bernoulli.
- Si $k < a$, la curva se divide en dos curvas cerradas.
- Si k es mucho menor que a, esas dos curvas se hacen muy pequeñas y bordean a los puntos A y B.



6. CLASIFICACIÓN DE UNA CÓNICA.

Fue Descartes quien demostró que las secciones cónicas de Apolonio se hallan todas contenidas en un único conjunto de ecuaciones cuadráticas

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Dado que las secciones cónicas incluyen a las circunferencias de los antiguos astrónomos, las elipses de Kepler y la parábola utilizada por Galileo para describir la trayectoria de un proyectil, este descubrimiento de Descartes facilitaba a los físicos una poderosa herramienta, sin la cual el propio Newton se habría visto severamente limitado.

La ecuación general de segundo grado tiene algunas propiedades generales que permiten clasificar cada una de las cónicas según los valores de los parámetros a, b, c, d, e, f.

En primer lugar, las siguientes tres cantidades son invariantes con respecto a traslaciones $\begin{cases} x' = x + h, \\ y' = y + k \end{cases}$ y giros $\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha, \\ y' = x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$:

- Invariante cúbico: $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$

- Invariante cuadrático: $\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2$

- Invariante lineal: $S = a + c$.

De acuerdo a los signos de los mismos y comparando con las ecuaciones canónicas obtenidas antes, se deducen las siguientes condiciones para cada tipo de cónica:

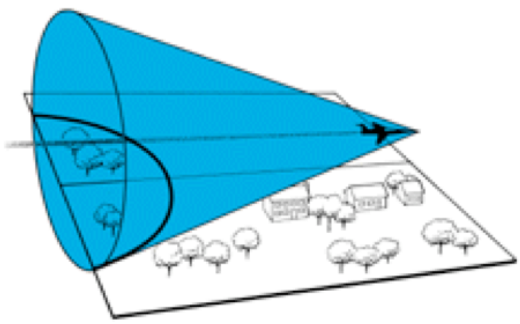
$$\text{Si} \quad \delta > 0 \quad \text{y} \begin{cases} \Delta < 0 & : \text{elipse real} \\ \Delta > 0 & : \text{elipse imaginaria} \\ \Delta = 0 & : \text{dos rectas imaginarias con un punto real com˙n} \end{cases}$$

$$\text{Si} \quad \delta < 0 \quad \text{y} \begin{cases} \Delta \neq 0 & : \text{hipérbola real} \\ \Delta = 0 & : \text{dos rectas reales concurrentes} \end{cases}$$

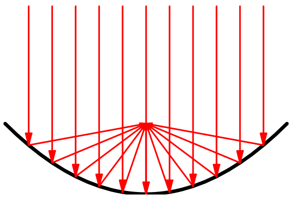
$$\text{Si} \quad \delta = 0 \quad \text{y} \begin{cases} \Delta \neq 0 & : \text{parábola real} \\ \Delta = 0 & : \text{dos rectas} \begin{cases} af - d^2 < 0 & \text{paralelas reales} \\ af - d^2 = 0 & \text{reales e iguales} \\ af - d^2 > 0 & \text{imaginarias} \end{cases} \end{cases}$$

7. PROPIEDADES VARIAS.

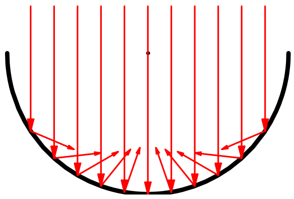
- Así como una propiedad sencilla es que, dados tres puntos no alineados, existe una y sólo una circunferencia que pasa por los tres, no tan conocida ni tan sencilla es que por cinco puntos pasa una y sólo una cónica, la cual será degenerada si por lo menos tres de los puntos están alineados.
- La elipse es la curva que aparece con más frecuencia en la vida cotidiana. La trayectoria de un objeto móvil que describe una órbita cerrada bajo la influencia de una fuerza central inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Kepler fue quien anunció por vez primera este descubrimiento, tan sorprendente para la época donde no se aceptaba que las trayectorias de los cuerpos celestes fueran menos perfectas que los círculos.
- Observemos que, por efecto de la erosión, las piedras de las playas tienden a adoptar formas elipsoidales, no esféricas.
- El lugar geométrico de los puntos en el extremo de la puerta de un garaje montada en unas poleas sobre un eje vertical es precisamente (un cuadrante de) una elipse.
- Las hipérbolas aparecen en algunas aplicaciones aeronáuticas. Supongamos que un avión vuela a una altura h sobre la superficie terrestre a la velocidad supersónica v. Se plantea el problema de determinar la región de la superficie terrestre en cuyos puntos y en un momento determinado se oye o se ha oído el sonido del motor del avión.



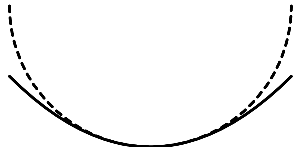
- La ya comentada propiedad reflexiva de la parábola tiene el inconveniente de que sólo es posible absorber rayos de luz paralelos que lleguen en una sola dirección. Esto no permite fabricar telescopios de grandes proporciones. Sin embargo, una combinación de las propiedades de las parábolas y de las circunferencias tiene ventajas prácticas como la posibilidad de fabricar el telescopio de radio más grande del planeta (situado en el Centro Astronómico y de Ionosfera Nacional en Arecibo, Puerto Rico), con forma circular. Su tamaño no permite dirigirlo en diferentes direcciones, pero al hacerlo esférico ya no es necesario. En su lugar, una antena situada en el foco de la parábola de la que la circunferencia es el círculo de curvatura puede dirigirse a diferentes lugares del estanque para elegir una dirección de observación. Desde luego, no enfocará de forma tan precisa como un paraboloide, pero localmente se tendrá una aproximación bastante aceptable.



Parábola: todos los rayos que provienen de la misma dirección convergen.



Circunferencia: los rayos no convergen pero actúan de la misma forma en cualquier dirección.



A nivel local, el círculo de curvatura de la parábola coincide con ella cerca del vértice.

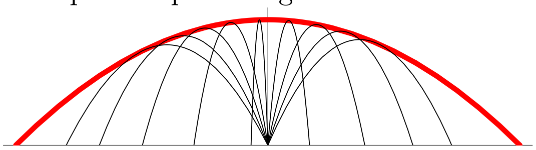
Como comentario interesante, mencionaremos que el estanque de Arecibo ha sido utilizado por los científicos para tratar de detectar señales de radio de civilizaciones extraterrestres. Incluso un episodio de la serie televisiva "Expediente X" tuvo lugar supuestamente allí. Además la búsqueda de fuentes de señales regulares de radio ha permitido a los astrofísicos descubrir los pulsares, remanentes de gigantescas explosiones de estrellas.

8. CÓNICAS EN LA VIDA REAL.

Resumimos a continuación las diferentes aplicaciones que las secciones cónicas tienen en la vida real:

1) Los cables de los puentes colgantes tienen forma parabólica (forman la envolvente de una parábola). Se creía hace tiempo que las cuerdas o cadenas que se suspenden agarradas únicamente por sus extremos también formaban parábolas (hoy sabemos que la curva que describen es un coseno hiperbólico).

2) Las trayectorias de los proyectiles tienen forma parabólica. Los chorros de agua que salen de un surtidor tienen también forma parabólica. Si salen varios chorros de un mismo punto a la misma velocidad inicial pero diferentes inclinaciones, la envolvente de esta familia de parábolas es otra parábola (llamada en balística parábola de seguridad, pues por encima de ella no es posible que pase ningún punto de las parábolas de la familia). El mayor alcance que se puede obtener es aquél en que el ángulo de inclinación inicial es de 45 grados.



3) La forma de los telescopios, detectores de radar y reflectores luminosos son parabólicas. En los faros de los coches se coloca la fuente de luz en el foco de la parábola, de modo que los rayos, al reflejarse en la lámpara, salen formando rayos paralelos. La nave espacial PLUTO de la NASA incorpora también un reflector parabólico. Recordar también el conocido efecto de quemar un hoja de papel concentrando los rayos solares mediante un espejo parabólico.

4) Un telescopio de espejo líquido es un telescopio reflectante (es decir, que usa la propiedad reflectante de la parábola) cuyo espejo principal está hecho de mercurio líquido. Un famoso ejemplo lo constituye el telescopio HUBBLE situado en el espacio exterior. El problema es cómo puede un líquido formar un espejo parabólico y por qué se quiere así. La respuesta es que si se tiene un contenedor giratorio de líquido, la superficie del mismo formará un paraboloide perfecto, incluso si la superficie interior del contenedor tiene imperfecciones. De este modo, no es necesario el pulido de los lentes y además los espejos pueden hacerse más grandes que los sólidos. Al utilizar mercurio líquido se consigue que los espejos sean más baratos que los tradicionales (sólo hace falta una capa muy fina de mercurio pues este es muy pesado).

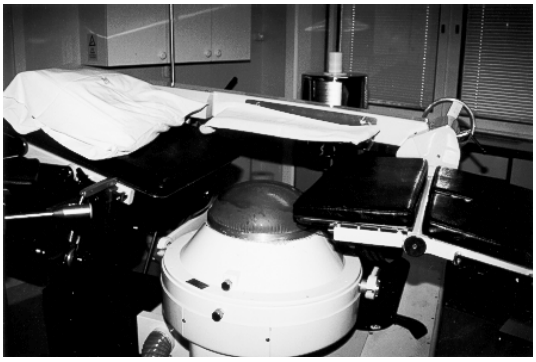
5) Las órbitas de los planetas alrededor del sol son elípticas (el sol se encuentra en uno de los focos). La excentricidad de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es aproximadamente 0,0167. La de mayor excentricidad es la órbita de Plutón, 0,2481, que incluso es pequeña. Los cometas y los satélites también describen órbitas elípticas. En el extremo contrario está el cometa HALLEY cuya excentricidad es de 0,9675, muy próxima a 1.

6) En Óptica y propagación de ondas se utilizan lentes elípticas.

7) En diseño artístico es común encuadrar retratos y fotografías en un marco con forma elíptica. La mayoría de los dispositivos usados para recortar figuras elípticas están basadas en las ecuaciones de la elipse como comentamos anteriormente.

8) Una revolucionaria técnica médica introducida a mediados de la década pasada para el tratamiento de los cálculos renales utiliza propiedades reflexivas de las cónicas. La idea principal consiste en usar ondas sonoras intensas generadas fuera del cuerpo del paciente para pulverizar las piedras y convertirlas en arena que pueda ser fácilmente eliminada por el organismo. La clave está en enfocar las ondas para que no afecten al cuerpo, sólo al cálculo. Para ello se usa una cámara semielipsoidal. En uno de sus focos se crea una poderosa chispa que evapora agua. La parte que golpea el reflector converge en el otro foco, donde se encuentra la piedra, con toda su intensidad, provocando su destrucción. *La mejor cura para un cálculo es un poco de cálculo.*

   Este tratamiento se aplica en la actualidad en más del 80 % de piedras en el riñón y la uretra. Además el tiempo de recuperación es de 3 días en comparación con las dos semanas con la cirugía convencional, así como la tasa de mortalidad es del 0,01 % frente al 2 % del método tradicional.



9) APOLO XIII. El 11 de Abril de 1970 el cohete Saturno V impulsó desde Cabo Kennedy a la nave espacial Apolo XIII en su misión hacia la Luna. Alrededor de 56 horas después el tanque de oxígeno número 2 del módulo de servicio explotó, causando una sucesión de daños mecánicos y eléctricos, forzando el final adelantado de la misión. Cuando la explosión tuvo lugar, los astronautas James Lovell, John Swigert y Fred Haise estaban a 200.000 millas de la Tierra. Se necesitaba entonces organizar un plan para devolverlos sanos y salvos a casa. En el espacio lo peor que se puede hacer es apuntar la nave hacia la Tierra y encender los cohetes. Las ideas principales del plan a seguir se basan en consideraciones del cálculo. Para ello debemos saber:

a) Si suponemos la Tierra esférica y con distribución de masa simétrica, situando el centro de la Tierra en el origen de un sistema de coordenadas tridimensional, la fuerza ejercida por la Tierra sobre una partícula de masa unidad con vector de posición $\overrightarrow{r}$ es

$$\overrightarrow{F} = (-GM/r^2)\overrightarrow{u}, \tag{1}$$

donde G es la constante de gravitación universal, M es la masa de la Tierra, r es el módulo del vector $\overrightarrow{r}$ y $\overrightarrow{u}$ es el vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{r}$. Esta ley se aplica con bastante exactitud al caso en que la Tierra no se considera como un punto (pues el satélite espacial está próximo a ella).

b) Mediante esta ecuación se puede probar que una partícula recorre una órbita alrededor de la Tierra que consiste en una curva plana de ecuación en coordenadas polares

$$r = \frac{p}{(1 + e\cos\vartheta)^2}, \tag{2}$$

donde p y e son constantes.

Ya sabemos que esta curva es una cónica de excentricidad e. Así pues, el problema consiste en elegir una órbita adecuada para regresar a la Tierra. La forma más fácil es la siguiente:

Observamos que las constantes p y e están dadas por

$$p = (r_0 v_0)^2, \; e = (r_0 v_0^2/GM) - 1,$$

donde r_0 es la distancia inicial del punto considerado al centro de la Tierra y v_0 la velocidad en dicho punto. Estas fórmulas indican que la excentricidad de la trayectoria viene controlada por el valor de v_0. Así, por ejemplo, si estamos en alguna órbita, digamos circular, podemos aumentar nuestra velocidad (encendiendo los motores) y situarnos en una gran órbita elíptica. Con este tipo de maniobras podemos situarnos en diferentes órbitas y llegar a cualquier punto determinado.

Referencias en la Web

[1] Eduard Belinsky: Introducing the ellipse.
http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Lab/3550/ellipse.htm

[2] Jill Britton: Ocurrence of the Conics.
http://www.camosun.bc.ca/ jbritton/jbconics.htm

[3] Marc Frantz: Liquid Mirror Telescopes.
http://www.math.iupui.edu/m261vis/LMirror/LMirror.html

[4] Xah Lee: Conic Sections.
http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_ dir/ConicSections_ dir/conicSections.html

[5] Silvio Levy: Conics.
http://www.geom.umn.edu/docs/reference/CRC-formulas/node26.html.

[6] Ivars Peterson: Billiards in the Round.
http://www.maa.org/mathland/mathland_ 3_ 3.html

[7] James A. Sellers: An Introduction to Conic Sections.
http://www.krellinst.org/uces/archive/resources/conics/newconics.html

[8] Eric W. Weisstein's: Conic Sections.
http://mathworld.wolfram.com/ConicSection.html