MECANICA CUANTICA I (2do. Cuatrimestre/2017) Prof. N.J. Castellani.

Guía de Problemas Nº 5.

1) Pruebe las siguientes relaciones:

$[L_z, L_+] = -i\hbar L_-$,
$L_-L_+ = L^2 + L_z^2 - \hbar L_z$.

2) Pruebe las siguientes relaciones de conmutación:

$[L_i, R_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}R_k$
$[L_i, P_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}P_k$,

donde los subíndices indican las diferentes componentes cartesianas de los observables $\underline{L}$, $\underline{R}$ y $\underline{P}$.

3) Sea el autovector $|k, \lambda, m>$ de los observables L^2 y L_z. Pruebe que:
a) cuando $\lambda > m(m-1)$, $L_-|k, \lambda, m>$ es autovector de L^2 con autovalor $\lambda\hbar^2$ y autovector de L_z con autovalor $m\hbar$;
b) cuando $\lambda = m(m-1)$, $L_-|k, \lambda, m> = 0$.

4) Dibuje la distribución angular de probabilidades para las autofunciones $Y_2^0(\theta, \varphi)$, $Y_2^{\pm1}(\theta, \varphi)$ y $Y_2^{\pm2}(\theta, \varphi)$.

5) El estado de una partícula viene descripto por la siguiente función de onda:

$$\psi (x, y, z) = N (x + y + z) \exp(-r^2/\alpha^2),$$

donde N es una constante de normalización y α es un número real.
¿Cuál es la probabilidad de obtener $0\hbar$ y $2\hbar^2$ como autovalores de L_z y L^2, respectivamente?

6) Considere una partícula que está en el estado $|k, l=1, m_x=+1>$, donde l y m_x son los números cuánticos de los observables L^2 y L_x, respectivamente. Expresar este estado en función de los estados $|k, l=1, m_z>$.

7) Considere una partícula P de masa μ que se mueve en el plano xy sobre una circunferencia de centro O y radio fijo ρ (rotador en dos dimensiones). La única variable es el ángulo α=(Ox,OP) y el estado cuántico de la partícula está definido por la función de onda $\psi(\alpha)$.
a) Considere el operador $M=(-i/\hbar)(d/d\alpha)$. ¿Es hermítico? Calcular los valores propios y las funciones propias normalizadas de M. ¿Cuál es su significado físico?
b) Calcule los valores propios y las funciones propias del hamiltoniano $H= M^2/(2\mu\rho^2)$. ¿Hay niveles degenerados?

8) Sea una función cualquiera de $f(\underline{r})$ y una rotación diferencial $\delta\varphi$ alrededor del eje ň. Probar que el cambio diferencial de f es

$$\delta f= (-i/\hbar)\, \delta\varphi\, ň.\underline{L}\, f$$

a) Probar que una rotación en φ alrededor del eje $\check{n}$ transforma a $f(\underline{r})$ en una $g(\underline{r})$ tal que

$$g(\underline{r})= \exp[(-i/\hbar)\varphi\check{n}.\underline{L}]f(\underline{r})= Rf(\underline{r})$$

(R se llama operador de rotaciones).

b) Realice una rotación infinitesimal sobre un observable A:
$A' = R\, A\, R^{+}$ y demuestre que para que este quede invariable ante una rotación cualquiera se debe cumplir la siguiente regla de conmutación (operador escalar):

$$[\underline{L}.\check{n},A]=0$$