MECANICA CUANTICA I (2do. Cuatrimestre/2017) Prof. N.J. Castellani.

Guía de Problemas Nº 7.

1) A partir de las expresiones de las matrices de Pauli, demostrar que: $\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = \sigma_z$.
Luego, a partir de estas propiedades encontrar el conmutador y el anticonmutador de $\sigma_x$ y $\sigma_y$.
Probar que: $\sigma_x \sigma_y \sigma_y = iI$.

2) Considere el observable de spin $\underline{S}$ según una dirección arbitraria $\check{n}(\theta,\varphi)$. Verifique que los autovectores correspondientes $|\pm\rangle_{\check{n}}$ se pueden expresar como:

$$|+\rangle_{\check{n}} = \cos(\theta/2)\, e^{-i\varphi/2}\ |+\rangle + \mathrm{sen}(\theta/2)\, e^{i\varphi/2}\, |-\rangle,$$
$$|-\rangle_{\check{n}} = -\mathrm{sen}(\theta/2)\, e^{-i\varphi/2}\ |+\rangle + \cos(\theta/2)\, e^{i\varphi/2}\, |-\rangle.$$

3) Sea una partícula de spin 1/2, con momento magnético $\underline{M} = \gamma \underline{S}$. En el instante t=0 el estado del sistema es $|\psi(t=0)\rangle = |+\rangle$, donde $|+\rangle$ es el autovector correspondiente al autovalor $+\hbar$ de $S_z$.
a) Si medimos $S_x$, $S_y$ o $S_z$ en t=0, ¿qué resultados obtendríamos y con qué probabilidades?
b) Supongamos que la partícula evoluciona sometida a un campo magnético constante y uniforme $\underline{B}$ paralelo a Oy. Calcular el estado del sistema a $t \neq 0$ expresado en la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.
c) Si a $t \neq 0$ medimos alguno de los observables $S_x$, $S_y$ y $S_z$ ¿qué resultados obtendríamos y con qué probabilidades? ¿Podemos ajustar la magnitud de $\underline{B}$ de manera que tengamos al tiempo t un valor prefijado en la medición de estos observables? Dar una interpretación física.

4) Considere el operador suma $\underline{S} = \underline{S_1} + \underline{S_2}$, donde $\underline{S_1}$ y $\underline{S_2}$ son operadores de spin ½. Interesa determinar las autovectores de $\underline{S}^2$ y $S_z$.
a) Utilizando la base estándar de $\underline{S_1}^2$, $S_{1z}$, $\underline{S_2}^2$ y $S_{2z}$ calcular los elementos de matriz del operador $S_z$. Verificar el carácter diagonal de $S_z$ en esta base.
b) Utilizando la identidad:

$$\underline{S}^2 = \underline{S_1}^2 + \underline{S_2}^2 + 2\, S_{1z} S_{2z} + S_{1+} S_{2-} + S_{1-} S_{+}$$

calcular los elementos de matriz del operador $\underline{S}^2$ en la base estándar. Verificar el carácter hermítico pero no diagonal de $\underline{S}^2$ en esta base.
c) Diagonalizar la matriz del operador $\underline{S}^2$ y obtener los autovalores y autovectores correspondientes.