MECANICA CUANTICA I (2do. Cuatrimestre/2017) Prof. N.J. Castellani.

Guía de Problemas Nº 2.

1) Hallar las soluciones de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para un escalón de potencial de altura V_0 ubicado en el origen de coordenadas tal que:

$$V = 0 \text{ si } x < 0,$$
$$= V_0 \text{ si } 0 \leq x,$$

cuando $V_0<E$ y $0<E<V_0$.

a) Obtener expresiones para los coeficientes de reflexión R y de transmisión T en función de $k_1=(2mE)^{1/2}/\hbar$ y $k_2=(2m|E-V_0|)^{1/2}/\hbar$.

b) Discutir la evolución temporal de un paquete incidente desde $-\infty$.

c) Encontrar la demora del paquete durante el rebote cuando $0<E<V_0$.

2) Hallar las soluciones de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para una barrera de potencial de altura V_0 y ancho "a" simétrico con respecto al origen tal que:

$$V = 0 \text{ si } |x|>a/2,$$
$$= V_0 \text{ si } |x|<a/2,$$

cuando $V_0<E$ y $0<E<V_0$.

a) Obtener expresiones para los coeficientes de reflexión R y de transmisión T en función de $k_1=(2mE)^{1/2}/\hbar$ y $k_2=(2m(E-V_0))^{1/2}/\hbar$ para $V_0<E$, y de $k_1=(2mE)^{1/2}/\hbar$ y $\rho_2=(2m(V_0-E))^{1/2}/\hbar$ para $0<E<V_0$.

b) Encontrar que la condición de máximos de transmisión para $V_0<E$ (resonancias) es $k_2a=n\pi$, con n entero positivo. Dar una interpretación física.

3) Hallar las soluciones de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para un pozo de potencial de profundidad $-V_0$ y ancho "a" simétrico con respecto al origen tal que:

$$V = 0 \text{ si } |x|>a/2,$$
$$= -V_0 \text{ si } |x|<a/2,$$

cuando $0<E$ y $-V_0<E<0$.

a) Mostrar que cuando $-V_0<E<0$ las condiciones de contorno de las autofunciones exigen que se cumpla la siguiente relación:

$$(1-\rho/ik)^2(1+\rho/ik)^2= \exp(2ika), \text{ donde } k=(2m|E|)^{1/2}/\hbar \text{ y } \rho=(2m(V_0-|E|))^{1/2}.$$

b) Al tomar la raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad anterior surgen dos tipos de solución, según $\pm \exp(ika)$. Mostrar que llevan a las condiciones:

$$|\text{sen}(ka/2)| = k/k_0 \text{ y } |\cos(ka/2| = k/k_0, \text{ donde } k_0=(2mV_0)^{1/2}/\hbar.$$

c) Viendo qué condiciones debe satisfacer la fase ka/2 a través del signo de tg(ka/2), encontrar gráficamente los autovalores de energía.

d) Verificar que las correspondientes autofunciones pueden ser de simetría par o impar.
e) ¿Cómo pueden obtenerse los resultados correspondientes a un pozo infinito del mismo ancho "a", a partir de los resultados anteriores?

4) Hallar las soluciones de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para un pozo de la forma:

$$\begin{aligned} V &= \infty \text{ si } x < 0, \\ &= -V_0 \text{ si } 0 \leq x \leq a, \\ &= 0 \text{ si } a < x, \end{aligned}$$

cuando $-V_0 < E < 0$.
a) Mostrar que las condiciones de contorno sobre la función de onda exigen que se cumplan las siguientes relaciones:

$\kappa a = -k'a \,\mathrm{cotg}(k'a)$ y $(k'a)^2 + (\kappa a)^2 = (k_0 a)^2$, donde $\kappa^2 = 2m(-E)/\hbar^2$, $(k')^2 = 2m(E+V_0)/\hbar^2$ y $(k_0)^2 = 2mV_0/\hbar^2$

b) Estudiar los métodos gráficos para encontrar las autovalores de energía de los estados ligados permitidos.
c) Verificar que cuando el producto $V_0 a^2$ es lo suficientemente pequeño no puede haber estado ligado.
d) ¿Cómo pueden vincularse los resultados anteriores con aquellos correspondientes a un pozo infinito del mismo ancho "a"?

5) Escribir las soluciones de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para un pozo unidimensional definido por:

$$\begin{aligned} V &= \infty \text{ si } x < 0, \\ &= V_0 \text{ si } 0 \leq x \leq a, \\ &= 0 \text{ si } a < x \leq b \\ &= \infty \text{ si } x > b, \end{aligned}$$

para los casos en que $E > V_0$ y $0 < E < V_0$.
a) Mostrar que las condiciones de contorno sobre la función de onda exigen que se cumpla

para $E>V_0$: $k'\tan[(b-a)k] = -k\tan(ak')$,
donde $k^2 = 2mE/\hbar^2$ y $(k')^2 = 2m(E-V_0)/\hbar^2$,

para $0<E<V_0$: $\kappa\tan[(b-a)k] = -k\tanh(a\kappa)$,
donde $k^2 = 2mE/\hbar^2$ y $\kappa^2 = 2m(V_0-E)/\hbar^2$.

b) Estudiar las energías de los estados ligados para el caso en que el escalón de altura V_0 y ancho "a" produce un efecto pequeño.

6) Considerar un potencial unidimensional $V(x)$. Probar que si en un punto x_0 donde hay una discontinuidad finita del potencial la función de onda es continua, la derivada de la función de onda es a su vez continua.

7) Considerar una partícula cuyo Hamiltoniano es:

$$H = -(\hbar^2/2m)(d^2/dx^2) - \alpha\, \delta(x)$$

donde α es una constante positiva (dar sus dimensiones).
a) Integrar la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo entre $-\varepsilon$ y ε. Haciendo tender ε a 0, muestre que la derivada de la función de onda $\psi(x)$ sufre una discontinuidad en x=0. Obtenerla en función de α, m y $\psi(0)$.
b) Considerando que $\psi(x)$ es de cuadrado integrable, deducir los autovalores posibles de la energía para $E<0$. Calcular las autofunciones normalizadas correspondientes.
c) Representar gráficamente las autofunciones.
d) Estudiar el caso $E>0$.

8) Una partícula se encuentra en una caja bidimensional cuadrada de ancho "a" en el plano (x,y) y de paredes impenetrables.
a) Encontrar las autofunciones y los autovalores posibles de la energía.
b) Discutir la degeneración de las autovalores de la energía.
c) Dibujar la densidad de probabilidad para el estado fundamental y el primer nivel excitado mediante cortes según planos paralelos a los planos (x,z) y (y,z).