MECANICA CUANTICA I (2do. Cuatrimestre/2017) Prof. N.J. Castellani.

Guía de Problemas Nº 4.

1) A partir de la relación existente entre los autovectores $|\varphi_n\rangle$ y $|\varphi_0\rangle$ demostrar que la autofunción φ_n (x) correspondiente al autovalor E_n de H satisface:

$$\varphi_n (x) = (1/\sqrt{n!})(\hbar/2m\omega)^{n/2} [m\omega x/\hbar + d/dx]^n \varphi_0 (x).$$

Encontrar las autofunciones para n=0, 1 y 2.

2) Sea el autovector $|\varphi_n\rangle$ correspondiente al autovalor E_n del operador H del oscilador armónico unidimensional. A partir del Teorema de Ehrenfest probar que los valores medios de *X* y *P* para este estado satisfacen:

$$\langle X\rangle = \langle X\rangle_0 \cos(\omega t) + (\langle P\rangle_0/m\omega) \,\text{sen}\, (\omega t)$$

$$\langle P\rangle = \langle P\rangle_0 \cos(\omega t) - (m\omega\langle X\rangle_0) \,\text{sen}\, (\omega t).$$

3) Una partícula de masa "m" y carga "e" está sometida a la acción de una fuerza recuperadora armónica y a un campo eléctrico uniforme $\underline{E}$ en la dirección x. Mostrar que el potencial correspondiente puede escribirse:

$$V(x)= [m\omega^2(x-x_0)^2]/2 + V_0,$$ donde x_0 y V_0 son constantes.

A partir de las autofunciones y autovalores del hamiltoniano para el oscilador armónico unidimensional obtenga las autofunciones y autovalores para este problema.

4) Considere el problema de autovalores y autofunciones de operador hamiltoniano del oscilador armónico unidimensional. Adimensionalice la ecuación diferencial mediante el cambio de variable $y= x\sqrt{(m\omega/\hbar)}$. Plantee una solución de la forma $\varphi(x)= B\exp(-y^2/2)H(y)$. Encuentre la ecuación diferencial para H(y). Plantee luego una solución en forma de serie para H(y). Probar la siguiente relación de recurrencia entre los coeficientes a_{k+2} y a_k:

$$a_{k+2}/a_k= (1+ 2k -\varepsilon)/(k+1)(k+2),$$ donde $\varepsilon= 2E/\hbar\omega$.

Observar que en principio los coeficientes a_0 y a_1 son arbitrarios. Compare el comportamiento de a_{k+2}/a_k para $k\to\infty$ con aquél de la función $\exp(y^2)$. Deduzca que la serie debe cortarse en algún a_n. De esta condición encuentre una expresión para los autovalores ε_n. A partir de la condición de que las autofunciones deben ser de paridad definida, probar que a_0 o a_1 deben ser nulos. Escribir la forma de las funciones H(y) para n= 0, 1 y 2. Encuentre a_0 o a_1 por normalización.

6) En el instante t=0 una partícula de masa m se encuentra en un estado mezcla de los dos primeros estados estacionarios del oscilador armónico, tal que su energía media es $\hbar\omega_0$.

a) ¿Cuál es la función de onda inicial?

b) ¿Cuál es para $t \neq 0$?

c) Calcule $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ y Δx en función de t.

d) Calcule $\langle H \rangle$, $\langle H^2 \rangle$ y ΔH. ¿Qué puede decir de su dependencia temporal?

e) Compare c) y d).

7) Demuestre que todo estado estacionario $|\varphi_n\rangle$ del oscilador armónico simple satisface el teorema del virial, esto es,

$$2\langle\varphi_n|\, T\, |\varphi_n\rangle = /\langle\varphi_n|\, V(x)\, |\varphi_n\rangle/.$$