MECANICA CUANTICA I (2do. Cuatrimestre/2017) Prof. N.J. Castellani.

Guía de Problemas Nº 3.

1) Probar las siguientes relaciones de conmutación:

a) $[A,BC]=[A,B]C+B[A,C]$

b) $[A,[B,C]] + [B,[C,A] + [C,[A,B]] = 0$

2) Si $[A,B]=0$ y $F(A)=\Sigma_n f_n A^n$, probar que $[F(A),B]=0$.

3) Si $[A,C]=[B,C]=0$ y $[A,B]=C$, probar que $[A,B^n]= nB^{n-1}C= nCB^{n-1}$ y $[A^n,B]= nA^{n-1}C= nCA^{n-1}$.

4) Sea la base ortonormal $\{|a_i>\}$ del operador A. Si $F(A)=\Sigma_n f_n A^n$, hallar los autovalores y autovectores de F(A).

5) Demostrar las siguientes propiedades:

a) $(\lambda A)^\dagger= \lambda^* A^\dagger$

b) $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

6) Considere un sistema físico cuyo espacio de estados está referido a la base ortonormal $\{|1>, |2>\}$. Se tiene el operador S cuya matriz, según esta base, se escribe así:

$$S= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

a) ¿Es S hermítico? Calcular sus valores y vectores propios. Dar su expresión normalizada en la base dada.

b) Calcular las matrices que representan los proyectores sobre estos vectores propios. Verificar entonces que éstos satisfacen la relación de clausura.

7) Considere un sistema físico cuyo espacio de estados de tres dimensiones está referido a la base ortonormal constituída por los kets $|u_1>$, $|u_2>$, $|u_3>$. En esta base, los operadores A y B tienen la siguiente representación matricial:

$$A= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) ¿Son A y B herméticos?

b) Probar que A y B conmutan.

c) Encontrar una base de vectores propios comunes.

8) Probar la hermiticidad de los operadores X y P_x utilizando la representación $\{|\underline{r}>\}$.

9) Sea la siguiente función de onda: $\Psi(x)= N \exp(ip_0x/\hbar)/(x^2+a_0^2)^{1/2}$, donde a_0 y p_0 son constantes reales y N un coeficiente de normalización.

a) Determinar N.

b) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar la partícula entre $-a/\sqrt{3}$ y $+/\sqrt{3}$?
c) Calcular el valor medio del impulso para este paquete de ondas.

10) Sea un cierto autoestado del hamiltoniano de un pozo cuadrado de paredes infinitas y ancho a. Calcular $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ y Δx, $\langle p \rangle$, $\langle p^2 \rangle$ y Δp. Hallar el producto $\Delta p.\Delta x$ y discutir el resultado. Sea ahora el estado $\psi(t_0=0)= (1/\sqrt{2})(\varphi_1+\varphi_2)$. ¿Cómo son $\psi(t)$, $\langle x(t) \rangle$, $\langle p(t) \rangle$ para $t \neq t_0$?

11) Considere un sistema físico cuyo espacio de estados (de tres dimensiones) está referido a la base ortonormal constituída por los kets $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$, $|u_3\rangle$. En esta base, el hamiltoniano H y dos observables A y B tienen la siguiente representación matricial:

$$H=\hbar\omega_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A=a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B=b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En el instante t=0 el sistema se encuentra en el estado $|\psi(0)\rangle = (1/\sqrt{2})|u_1\rangle + (1/2)|u_2\rangle + (1/2)|u_3\rangle$
a)Se mide la energía del sistema en el instante t=0. ¿Qué valores se pueden obtener y con qué probabilidades? Calcular el valor medio $\langle H \rangle$ y la dispersión ΔH.
b) En lugar de medirse H en t=0, se mide A. ¿Qué resultados se pueden obtener y con qué probabilidades?
c) Calcular el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ del sistema en el instante t.
d) Calcular los valores medios $\langle A \rangle(t)$ y $\langle B \rangle(t)$, ¿Qué resultado se obtiene si se mide A en el instante t?

12) Considere una situación unidimensional donde el potencial vale: $V(x)= \lambda x^n$. Estudiar en qué casos se cumple que $\langle dV/dx \rangle = [dV/dx]|_{x=\langle x \rangle}$. Estudiar las implicancias para la segunda de las igualdades del teorema de Ehrenfest.

13) Considere una partícula libre descripta por un paquete de ondas.
a) Mostrar, aplicando el teorema de Ehrenfest, que $\langle x \rangle$ es una función lineal del tiempo, si $\langle p \rangle$ permanece constante.
b) Escribir las ecuaciones de evolución de $\langle x^2 \rangle$ y $\langle xp+px \rangle$. Integrar estas ecuaciones.
c) Utilizando un origen adecuado de t, demostrar que: $(\Delta x)^2 = (1/m^2)\,[(\Delta p)_0]^2\, t^2 + [(\Delta x)_0]^2$
¿Cómo varía con t el tamaño del paquete de ondas?

14) Sea $\Psi(\underline{r})=\langle \underline{r}|\Psi\rangle$ la función de onda de una partícula.¿Cuál es la probabilidad de encontrar la abcisa de esta partícula en el intervalo $[x_1,x_2]$ del eje x? ¿Cuál es la función de onda del estado $|\Psi'\rangle$posterior a la medición?

15) Sea un pozo cuadrado de paredes infinitas y ancho a. Supongamos que el sistema está en el autoestado φ_1 de energía E_1 y hacemos una medición del observable X obteniendo $a/2 \pm \varepsilon/2$. Determinar la probabilidad $P(E_n)$ de encontrar al sistema, con posterioridad, en el autoestado φ_n. Considere para ello que la medición del observable X con error $\pm\,\varepsilon/2$ se representa por la siguiente función normada a 1: $\sqrt{\varepsilon}\,\delta^{(\varepsilon)}(x-a/2)$, donde $\delta^{(\varepsilon)}(x-a/2)= 1/\varepsilon$, si $|x-a/2| \leq \varepsilon/2$, y = 0, si $|x-a/2| > \varepsilon/2$.