Partículas Idénticas

Autor.: *Ilán Gómez* 2° cuatrimestre, 2018

Ejercicio 1. Preguntas teóricas.

(a) Explicar el postulado de simetrización.

(b) ¿Cómo se determina la correspondencia entre los fermiones y bosones con los estados simétricos y los antisimétricos?

(c) ¿Cuándo es posible expresar a la función de onda de varias partículas como un determinante de Slater?

(d) ¿Es el postulado de simetrización equivalente al principio de exclusión de Pauli? Explique (*ver Cohen-Tannoudji, complemento B_{XIV}-2-c-δ*).

(e) Describir las configuraciones conocidas como *parahelio* y *ortohelio* (función de onda y energías).

(f) ¿Cómo se expresa un físico cuando hace referencia al dicho casual "los electrones se alinean uno con spin hacia arriba y el otro con spin hacia abajo cuando tienen el mismo estado"?

Ejercicio 2.

Demostrar en forma directa que:

$$P_{21}\vec{P}_1\psi(\vec{r}_1, \varepsilon_1; \vec{r'}_2, \varepsilon_2) = \vec{P}_2 P_{21}\psi(\vec{r}_1, \varepsilon_1; \vec{r'}_2, \varepsilon_2)$$

(ε representa el spín de la partícula).

Ejercicio 3.

Teniendo un sistema de tres partículas y que hay tres estados accesibles para cada partícula ¿Cuántos estados diferentes existen si se consideran que las partículas son (a) distinguibles; (b) bosones; (c) fermiones?

Ejercicio 4.

(a) Dado tres estados ortogonales entre sí y normalizados ($|\psi_a\rangle$, $|\psi_b\rangle$ y $|\psi_c\rangle$), hallar la representación de la función de onda *normalizada* para los casos en que se consideren partículas no interactuantes distinguibles y partículas indistinguibles bosones/fermiones.

(b) Repetir para el caso en el que se tiene N partículas
¿Cuánto valen la constante de normalización en cada caso?

(c) Para el caso de $N = 3$ ¿cómo queda la función de onda *normalizada* cuando $|\psi_a\rangle = |\psi_b\rangle$? y cuando $|\psi_a\rangle = |\psi_b\rangle = |\psi_c\rangle$?

Ejercicio 5.

Utilizando el principio de indistinguibilidad de partículas idénticas, mostrar que la interferencia entre dos estados de diferente simetría de permutación no es observable, esto es:

$$\langle\Psi| A |\Psi\rangle = \langle s| A |s\rangle + \langle a| A |a\rangle$$

donde $|\Psi\rangle$ es una superposición de estados simétricos $|s\rangle$ y antisimetricos $|a\rangle$ y A es un observable cualquiera que satisface el principio de indistinguibilidad.

Ejercicio 6.

Demostrar que para sistemas con más de dos partículas el operador *simetrizador* y el *antisimetrizador* no son proyectores en subespacios complementarios.

Ejercicio 7. Pozo unidimensional

Considere dos partículas que no interactúan entre sí en un pozo de potencial unidimensional de paredes infinitas.

(a) Resuelva la ecuación de Schrödinger para ambas y luego aplique el postulado de simetrización si las partículas son bosones y antisimetrización si son fermiones.

(b) ¿Qué pasa con la energía y la degeneración del estado fundamental y del primer estado excitado en cada caso (distinguibles, bosones, ferminones)?
(c) Calcule la probabilidad de encontrar a las partículas en diferentes intervalos en el caso de que sean bosones o fermiones ¿Qué puede decir acerca de lo que sucede si las partículas son fermiones?

Ejercicio 8. Fuerza de intercambio.

Dada dos partículas, sin spín, que no interactúan entre sí y dos estados ortogonales entre sí, $|\psi_a\rangle$ y $|\psi_b\rangle$:

(a) Calcular la constante de normalización para la función de onda de dos partícula indistinguibles.
(b) ¿Cuánto vale la constante de normalización cuando $|\psi_a\rangle = |\psi_b\rangle$?
(c) Considerando un espacio unidimensional x, calcular el valor más probable del módulo cuadrado de la separación entre ambas partículas, $\langle(\Delta x)^2\rangle$, para el caso de partículas distinguibles y para el caso de partículas indistinguibles. Interpretar el resultado y explicar cómo influye el resultado en la implementación de la MC en la parte práctica.
(d) Particularizar $\langle(\Delta x)^2\rangle$ para el caso en el que las partículas se encuentran en un pozo cuadrado unidimensional de paredes infinitas.
(e) Particularizar $\langle(\Delta x)^2\rangle$ para el caso en el que las partículas se encuentran en un potencial armónico unidimensional y los estados $|\psi_a\rangle = |0\rangle$ y $|\psi_b\rangle = |1\rangle$.

Ejercicio 9. Átomo de Helio

Suponer una solución para la función de onda del Helio como producto de dos funciones de hidrogenoides:

(a) Comparar el valor de la energía del estado fundamental obtenido con este método con el valor experimental, $-78{,}975$ eV. (La energía del estado fundamental de Hidrógeno es $-13{,}6$ eV.)

(b) Hallar el valor más probable de la interacción interelectrónica (calcular $\langle 1/r_{12} \rangle$) y estimar, nuevamente, el valor del estado fundamental y compararlo con el valor experimental. ¿Cómo es ahora el acuerdo, mejor o peor? ¿Por qué?

Ejercicio 10.

Cuando los dos electrones de átomo de Helio están en estados excitados uno de ellos cae al estado fundamental, con lo cual, por conservación de la energía, el otro electrón gana energía suficiente como para llegar al continuo.

¿Cuál será la energía del electrón emitido si inicialmente ambos electrones se encontraban excitados en $n = 2$?

Ejercicio 11. Determinante de Slater

Sea la configuración $1s^1 2s^1$ del átomo de Helio. Expresar todos los estados antisimétricos de los términos ^1S y ^3S como suma de determinantes de Slater.

Ejercicio 12. Tabla de Slater

Utilizando una tabla de Slater verificar que la configuración p^3 posee los términos ^2D, ^2P y ^4S.

Ejercicio 13. Reglas de Hund

Considerando el estado fundamental del átomo de Nitrógeno, cuya configuración es $1s^2 2s^2 2p^2$, encontrar el multiplete correspondiente aplicando las reglas de Hund.
