Scattering

Asist.: *Ilán Gómez*

2° cuatrimestre, 2018

1. Actividades

Ejercicio 1.1.

Calcule la sección eficaz de una persona que corre bajo la lluvia. ¿Conviene caminar o correr para mojarse menos?

Ejercicio 1.2. Sección eficaz de Rutherford

(a) Obtenga la sección eficaz de Rutherford.

(b) Calcule la distancia mínima alcanzada y estime un tamaño del núcleo.

(c) Reescriba la función anterior en función de $|\mathbf{q}|$, siendo $|\mathbf{q} = \mathbf{p}_{in} - \mathbf{p}_{sc}|$, donde $\mathbf{p}_{in}$ representa el momento de la partícula incidente y $\mathbf{p}_{sc}$ el dispersado.

Ejercicio 1.3. Sección eficaz de Mott

Analice la sección eficaz de Mott en el límite $\beta \to 1$, analice las condiciones para obtener una dispersión de 180 y si es posible con partículas sin spin.

2. Preguntas conceptuales.

Ejercicio 2.1.

(a) Describir el proceso de scattering (clásico y cuántico, sección eficaz, parámetro de impacto, etc.). [1, 2, 3]

(b) ¿Cuáles son las hipótesis en la que basaremos nuestro estudio de la dispersión en partículas y qué implica cada una de ellas? [3]

(c) ¿Qué es la sección eficaz? [4, 5]
Explicar cómo cambia la sección eficaz del sistema de centro de masa al sistema de laboratrio [5, 6].

(d) ¿Qué se entiende por *reacción*, *canal*, *canal abierto* y *canal cerrado*? [7, 8]

Ejercicio 2.2.

(a) Escribir la ecuación que desemos resolver, la forma de la solución propuesta y sus condiciones de borde, justificarlas.
(b) ¿Qué es la *amplitud de scattering* y cómo se relaciona con la *sección eficaz diferencial*?
(c) ¿Qué son las *ondas estacionarias de scattering*?
(d) ¿Cómo se distribuye el flujo de probabilidad en el proceso de scattering? (ver el Ejercicio 3.3).

Ejercicio 2.3.

(a) ¿Qué son las *ondas parciales* y en qué consiste el *método de las ondas parciales*? [9] ¿Cuándo el método resulta útil? [25, 26, 27].
(b) ¿A qué es equivalente la *ecuación de Lippmann-Schwinger* (o ecuación integral de scattering)? [10, 11]
(c) ¿Qué es la *matriz de transición* y cómo se relaciona con la *sección eficaz diferencial*?
(d) ¿Cuál es la interpretación de la serie de Born? [12] ¿Cómo es su convergencia? [13]

---

3. Ejercicios Teóricos

Ejercicio 3.1.

(a) Justificar físicamente la validez de la condición asintótica para las *ondas estacionarias de scattering* $\psi_k^+(\mathbf{r})$ [14, 15]

$$\begin{aligned} \psi_k^+(\mathbf{r}) \;\; &\underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \;\; A\Big(\;\; \psi_{in}(\mathbf{r}) \;\; + \;\; \psi_{sc}(\mathbf{r}) \;\; \Big) \\ \psi_k^+(\mathbf{r}) \;\; &\underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \;\; A\Big(\;\; e^{ikz} \;\; + \;\; f_k(\Omega)\frac{e^{ikr}}{r} \;\; \Big) \end{aligned} \tag{1}$$

(b) Comentar cómo se debería generalizar la Ec. (1) para que represente la correcta evolución temporal de un paquete de ondas. [16, 17]

Ejercicio 3.2.

Utilizando la conservación del número de partículas y la definición de la sección eficaz diferencial, hallar [18, 19] la relación entre la sección eficaz diferencial y la amplitud de dispersión

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega} = |f_k(\Omega)|^2 \tag{2}$$

Demostrar que el flujo de probabilidad a través de una esfera es independiente del radio. ¿Qué factor en la función de onda de dispersión hace eso posible?

Ejercicio 3.3. Corriente de probabilidad

Utilizando la Ec. (1), la definición de la corriente de probabilidad

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{-i\hbar}{\mu}\,\Re\left[\varphi^*(\mathbf{r})\;\nabla\varphi(\mathbf{r})\right] \tag{3}$$

y la ecuación de continuidad

$$\nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \tag{4}$$

hallar la relación entre la sección eficaz diferencial y la amplitud de dispersión.
(*Ayuda:* hacer $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{in} + \mathbf{J}_{sc} + \mathbf{J}_{int}$, donde $\mathbf{J}_{int}$ es la corriente de interferencia, y descartar los términos de orden mayor en $1/r$).

(a) para el caso de $\theta \neq 0$ [20]. (El resultado es el del Ejercicio 3.2).
(b) para el caso de $\theta = 0$ [21, 22]. (El resultado es la fórmula del *teorema óptico*, el cual también es conocido como la *relación de Bohr-Peierls-Placzek*).
(c) ¿Cuál es la interpretación física del *teorema óptico*? (Ver el *Phys. Rev.* ***40***, *40 (1932)*).
(d) Discutir sobre el término de interferencia entre la onda incidente y la onda dispersada [23].

Ejercicio 3.4. Ecuación de Lippmann-Schwinger

Sean $\langle \mathbf{r} | \varphi_k \rangle = (2\pi)^{-3/2}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, $T_{fi} = \left\langle \varphi_{k_f} \right| V \left| \psi^+_{k_i} \right\rangle$ es la matriz de transición y $T^{(1B)}_{fi} = \left\langle \varphi_{k_f} \right| V \left| \varphi_{k_i} \right\rangle$ la matriz de transición a primer orden en serie de Born.

(a) Hallar la ecuación de Lippmann-Schwinger

$$\left| \psi^+_{k_i} \right\rangle = \left| \varphi_{k_i} \right\rangle + G_0^{(+)} V \left| \psi^+_{k_i} \right\rangle \tag{5}$$

$$\psi^+_{k_i}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\, e^{i\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}'\, \frac{e^{ik_f\cdot|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, V(\mathbf{r}')\, \psi^+_{k_i}(\mathbf{r}') \tag{6}$$

(I) la amplitud de scattering

$$f_k(\Omega) = -2\pi^2 \frac{2m}{\hbar^2}\, T_{fi} \tag{7}$$

(II) la sección eficaz diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4\pi^4 \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^2 |T_{fi}|^2 \tag{8}$$

(b) Hallar la Serie de Born y encontrar la sección eficaz diferencial a primer orden de Born, es decir

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4\pi^4 \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^2 \left| T^{(1B)}_{fi} \right|^2 \tag{9}$$

(I) Mostrar que la amplitud de scattering a primer orden de Born es proporcional a la transformada de Fourier del potencial.

Ejercicio 3.5. Método de las ondas parciales

(a) Demostrar que el comportamiento de las funciones de onda esféricas libres a grandes distancias es de la forma:

$$\varphi^{(0)}_{k,l.m}(\mathbf{r}) \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right)}{kr}\, Y_l^m(\theta,\phi) \tag{10}$$

(b) Demostrar que el comportamiento de las ondas parciales a grandes distancias es de la forma:

$$\varphi^{(0)}_{k,l.m}(\mathbf{r}) \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right)}{kr}\, Y_l^m(\theta,\phi) \tag{11}$$

(I) ¿Qué conclusión se puede sacar de comparar la Ec. (11) con la Ec. (10) y qué implica? [24]

(II) Demostrar que si $\delta_l < 0$ entonces el potencial es repulsivo, mientras que si $\delta_l > 0$ entonces el potencial es atractivo.

(III) Demostrar que en el caso de altas energías y a primera aproximación de Born se cumple la relación

$$\tan(\delta_l) = -\frac{2mk}{\hbar^2}\int dr\; r^2\; j_l^2(kr)\; V(r) \tag{12}$$

(c) Demostrar la relación

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l(k)\; j_l(kr)\; Y_l^0(\theta) \tag{13}$$

con $c_l(k) = i^l\sqrt{4\pi(2l+1)}$.

(d) Proponiendo $\psi_k^+ = \sum_{l=0}^{\infty} c_l(k)\; e^{-i\delta_l}\; \varphi_{n,l,0}(\mathbf{r})$ y utilizando la relación $e^{i2\delta_l} = 1 + 2i\sin(\delta_l)e^{i\delta_l}$ junto con la condición asintótica (1) y los coeficientes $c_l(k)$ del inciso anterior, demostrar que la amplitud de scattering es

$$f_k(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sqrt{4\pi(2l+1)}}{k}\; \sin(\delta_l)\; e^{i\delta_l}\; Y_l^0(\theta) \tag{14}$$

(e) Hallar las *secciones eficaces parciales* $\sigma_l(k)$ y la *sección eficaz total* $\sigma(k) = \sum_{l=0}^{\infty}\sigma_l(k)$.

(f) A partir de la Ec. (14) deducir el *teorema óptico* ¿Cuál sería la diferencia entre deducir la ecuación de esta forma y de la deducción del Ejercicio 3.3?

(g) Justificar un criterio para la utilidad del método de ondas parciales [25, 26, 27].

(h) Hallar un parámetro de impacto semi-clásico y mostrar que los efectos cuánticos introducen un factor 4 en la sección eficaz clásica, es decir $\sigma_{qm} = 4\sigma_{clas}$ [25, 26, 27].

Ejercicio 3.6. Resonancias

En general δ_l y, en consecuencia σ, varían lentamente como función de la energía de incidencia y de la intensidad del potencial. Sin embargo, en ciertos casos puede pasar que δ_l varía rápidamente en ciertos intervalos de enegía, causando cambios dramáticos en la correspondiente sección eficaz parcial σ_l en dicho rango de energía. (Ver Ref. [28, 29])

(a) Expresar que δ_l puede ser expresada como la suma de dos fases: una que no depende de la forma ni de la profundidad del potencial (potencial de esfera rígida, ver Ejercicio 4.3) y otra que si depende de las características del potencial a través de la derivada logarítmica de la función de onda radial.

(b) Mostrar que la condición de la existencia de un estado resonante con momento angular $l = l_r$, energía E_r y anchura Γ (siendo $0 < \Gamma \ll E_r$) es

$$\delta_l^{(r)} \simeq \arctan\left(\frac{\Gamma/2}{E_r - E}\right) \tag{15}$$

con $E_r - \Gamma/2 < E < E_r + \Gamma/2$.

(c) Hallar para el caso de resonancia pura la *fórmula de Breit-Wigner (de un nivel)*.

(d) Examinando la amplitud de la función de onda radial dentro de la region de interacción inferir el significado físico de una resonancia estrecha.

4. Ejercicios Prácticos

Ejercicio 4.1. Pozo esférico

Considerar el potencial de "pozo esférico"

$$V(r) = \begin{cases} -U(r) & ; r < a \\ 0 & ; r > a \end{cases} \tag{16}$$

con $U(r) > 0$.

(a) Resolver la ecuación radial para los estados s en el caso de $E > 0$..

(b) Comparar el valor exacto del inciso anterior con el que se obtiene de usando la primera aproximación en serie de Born.

(c) Definiendo la *longitud de scattering* α para bajas energías como

$$\alpha = -\lim_{k \to 0} \left(\frac{\tan\left(\delta_0(k)\right)}{k} \right) \tag{17}$$

demostrar que para el potencial de pozo esférico el resultado es

$$\alpha = \left[1 - \frac{\tan\left(\lambda_0 a\right)}{\lambda_0 a} \right] a \tag{18}$$

donde $\lambda_0 = \sqrt{U(r)}$

Ejercicio 4.2. Pozo esférico

Se considera un potencial central de la forma

$$V(r) = V_0 \, \delta(r - a) \tag{19}$$

Considerar el caso de baja energía ($ka \ll 1$) en el cual solo el canal s es el que contribuye significativamente.

(a) Calcular la amplitud de scattering, la sección eficaz diferencial y la sección eficaz a partir de la expansión de la función de scattering en ondas parciales.

(b) Considerando que la función de onda radial tiende a 0 para grandes distancias, hallar el desfasaje de scattering δ_0.

(c) Utilizando la aproximación de Born

  (a) repetir el primer inciso.

  (b) ahora obtener la amplitud de scattering para cualquier rango de energías.

  (c) comparar los resultados de este inciso con el primero.

Ejercicio 4.3. Esfera rígida

Considarar un potencial de "esfera rígida"de la forma

$$V(r) = \begin{cases} \infty & ; r < a \\ 0 & ; r > a \end{cases} \tag{20}$$

(a) Demostrar que la sección eficaz total es

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left| \frac{j_l(ka)}{h_l^{(1)}(ka)} \right|^2 \tag{21}$$

(b) ¿Cuál es el desfasaje de scattering δ_l?

(c) Demostrar que para el caso de bajas energías ($ka \ll 1$) la sección eficaz es cuatro veces la sección eficaz clásica.

(d) Demostrar que para el caso de altas energías ($ka \gg 1$) la sección eficaz es el doble de la sección eficaz clásica.

(e) ¿A qué fenómeno le atribuiría dicho comportamiento?

Ejercicio 4.4.

Demostrar que la derivada logarítmica de R_{lk} es una función monótona decreciente de la energía E.

Ejercicio 4.5. Potencial de Yukawa

(a) Calcular la sección eficaz diferencial y la total a primer orden en serie de Born para el caso de un potencial de Yukawa (también conocido como Coulomb apantallado)

$$V(r) = V_0 \, \frac{e^{-\alpha r}}{r} \tag{22}$$

Estudiar su validez, discutir la distribución angular y verificar que $\sigma^{(1B)} \sim \dfrac{A_\sigma}{E}$ cuando $E \to \infty$ y encontrar el coeficiente A_σ.

(b) Aproximar los resultados para el potencial Coulombiano haciendo que $\alpha \to 0$ y comparar con el resultado correcto, la fórmula de Rutherford:

$$\sigma(\Omega) = \frac{Z^2 q^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 16 E^2 \sin^4(\theta/2)} \tag{23}$$

(c) Para el caso de la onda s hallar, usando la aproximación de Born a primer orden, la expresión para la $\tan(\delta_0)$.

Ejercicio 4.6.

Considere el potencial

$$V(r) = V_0\, e^{-r/\beta} \tag{24}$$

donde V_0 y β son constantes positivas. Calcular en la primera aproximación de Born, la sección eficaz diferencial y total. Encontrar la forma explícita de la condición de validez para la aproximación de Born para este potencial. Estudiar la validez de la expresión obtenida para la sección eficaz total tanto para altas y bajas energías ($k\beta \gg 1$ y $k\beta \ll 1$). Discutir la distribución angular y verificar que $\sigma^{(1B)} \sim \dfrac{A_\sigma}{E}$ cuando $E \to \infty$ y encontrar el coeficiente A_σ.

Ejercicio 4.7. $\mathbf{e^-}$,H(1s)

Sea el proyectil incidente un electrón y el blanco un átomo de Hidrógeno en su estado fundamental ($\varphi_{100}(\mathbf{r})$). Este sería un problema de tres cuerpos y, en consecuencia, sin solución analítica conocida, por lo tanto lo reduciremos a un problema de dos cuerpos proponiendo que el electrón-proyectil es afectado por un potencial central de la siguiente forma:

$$V(\mathbf{r}) = V_0 \left(\frac{-1}{r} + \int \frac{|\varphi_{100}(\mathbf{r}')|^2}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d\mathbf{r} \right) \tag{25}$$

donde $V_0 = e^2/(4\pi\epsilon_0)$.

(a) ¿Cómo justificaría ud. la propuesta del potencial aproximado?

(b) Calcular la amplitud de dispersión en la aproximación de Born a primer orden.

Referencias

[1] H. Goldstein, *Mecánica Clásica*, Cap. 3, Sec. (3-1), *Reducción al problema equivalente de un cuerpo.*

[2] H. Goldstein, *Mecánica Clásica*, Cap. 3, Sec. (3-10), *Dispersión en un campo de fuerza central*

[3] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Vol. II, Cap. VIII, Sec. A-1 y A-2, *Introduction: 1-Importance of collision phenomena; 2-Scattering by a potential.*

[4] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Vol. II, Cap. VIII, Sec. A-3, *Definition of scattering cross section.*

[5] C.J. Joachain *Quantum Collision Theory*, Cap. 1, Sec. 3, *Cross section. Laboratory and center of mass systems.*

[6] H. Goldstein, *Mecánica Clásica*, Cap. 3, Sec. (3-11) *Transformación del problema de la dispersión a coordenadas del laboratorio.*

[7] B.H. Bransden and C.J. Joachain, *Physics of atoms and molecules*, Cap.11, Sec. 1, *Types of collisions, channels, thresholds and cross-sections.*

[8] C.J. Joachain *Quantum Collision Theory*, Cap. 1, Sec. 2, *Channels.*

[9] B.H. Bransden and C.J. Joachain, *Physics of atoms and molecules*, Cap.11, Sec. 4, ver pág. 472-473,

[10] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Vol. II, Cap. VIII, Sec. B-3, pág. 916 §1, *Integral scattering equation.*

[11] B.H. Bransden and C.J. Joachain, *Physics of atoms and molecules*, Cap.11, Sec. 4, pág. 487 §2, *The Green's function.*

[12] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Vol. II, Cap. VIII, Sec. B-4-b, *The Born aproximation: 4-Interpretation of the formulas.*

[13] B.H. Bransden and C.J. Joachain, *Physics of atoms and molecules*, Cap.11, Sec. 5, pág. 489 §2, *The Born series.*

[14] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Vol. II, Cap. VIII, Sec. B-1-b, *Asymptotic form of stationary scattering states. Scattering amplitude.*

[15] B.H. Bransden and C.J. Joachain, *Physics of atoms and molecules*, Cap.11, Sec. 2, pág. 466, *The stationary state wave of scattering.*

[16] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Vol. II, Cap. VIII, Sec. B-1-b. Ver el comentario (i) y la nota en la pág. 910.

[17] C.J. Joachain *Quantum Collision Theory*, Cap. 3, Sec. 5, *Potential scattering of wave packets.*

[18] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Vol. II, Cap. VIII, Sec. B-2-c, *Expression for the cross section.*

[19] B.H. Bransden and C.J. Joachain, *Physics of atoms and molecules*, Cap.11, Sec. 2, pág. 467, *The cross-section.*

[20] C.J. Joachain *Quantum Collision Theory*, Cap. 3, Sec. 3 *Cross section*

[21] C.J. Joachain *Quantum Collision Theory*, Cap. 3, Sec. 4 *Optical Teorem*

[22] B.H. Bransden and C.J. Joachain, *Physics of atoms and molecules*, Cap.11, Sec. 2, pág. 468, *The optical theorem.*

[23] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Vol. II, Cap. VIII, Sec. B-2-d, *Interference between the incident and the scattered waves.*

[24] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Vol. II, Cap. VIII, Sec. C-3-b-α, *Physical meaning of phase shifts.*

[25] B.H. Bransden and C.J. Joachain, *Physics of atoms and molecules*, Cap.11, Sec. 3, ver pág. 474.

[26] C.J. Joachain *Quantum Collision Theory*, Cap. 4, Sec. 4.1.4 pág. 73 y Sec. 4.1.5.

[27] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Vol. II, Cap. VIII, ver pág. 925, 932 y el comentario en 954.

[28] B.H. Bransden and C.J. Joachain, *Physics of atoms and molecules*, Cap.11, Sec. 3, ver pág. 480-484.

[29] C.J. Joachain *Quantum Collision Theory*, Cap. 4, Sec. 5 *Resonances*