Solución

1- La explicación del teorema óptico se omite. Para el inciso a, tenemos:

$$f(0) = \sum_l f_l(k)(2l+1)P_l(1)$$

$$= \sum_l f_l(k)(2l+1)$$

$$= \sum_l \frac{e^{(i\delta_l)}}{k} sen(\delta_l)(2l+1)$$

Utilizando $e^{ix} = \cos(x) + isen(x)$, obtenemos:

$$Im[f(0)] = \frac{1}{k}\sum_l sen^2(\delta_l)(2l+1)$$

$$Im[f(0)] = \frac{k}{4\pi}\sigma$$

2- Para $l = 0$, tenemos:

$$tan(\delta_0) = \frac{k\left(\frac{kacos(ka) - sen(ka)}{(ka)^2}\right) - \gamma_0 \frac{sen(ka)}{ka}}{k\left(\frac{kasen(ka) + cos(ka)}{(ka)^2}\right) + \gamma_0 \frac{cos(ka)}{ka}}$$

en el límite de baja energía $(ka \to 0)$

$$tan\delta_0 \approx -\frac{\gamma_0 ka^2}{1+\gamma_0 a}$$

la condición de resonancia, resulta:

$$1 + \gamma_0 a = 0$$

por lo tanto,

$$Kacot(Ka) = 0$$

con $K^2 = k^2 + \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2$

la condición de resonancia es:

$$Ka = (2n+1)\frac{\pi}{2} \qquad n = 1,2,\ldots,$$

fuera de la condición de resonancia, la sección eficaz total es:

$$\sigma_T \approx \frac{4\pi}{k^2}\left(sen(\delta_0)\right)^2 = 4\pi a^2\left(1 - \frac{tan(Ka)}{Ka}\right)^2$$

3- La amplitud de scattering para un potencial central en la aproximación de Born es:

$$f^B(\theta) = -\frac{1}{k}\int_0^\infty rsen(kr)U(r)dr$$

utilizando el desarrollo de ondas parciales,

$$f(\theta) = \frac{1}{k}\sum_l (2l+1)e^{i\delta_l}sen(\delta_l)P_l(cos\theta)$$

si $\delta_l \ll 1$, obtenemos

$$f(\theta) = \frac{1}{k}\sum_l (2l+1)\delta_l sen(\delta_l)P_l(cos\theta)$$

multiplicando la ecuación anterior por $P_l(cos\theta)$ y utilizando la condición de ortogonalidad llegamos a la expresión:

$$\delta_l{}^B = -k\int_0^\infty r^2U(r){j_l}^2(kr)dr$$

4- En el caso de un potencial atractivo de profundidad V_0 y extensión a, obtenemos:

$$a_0 = \left(1 - \frac{tan\left(\sqrt{V_0}a\right)}{\sqrt{V_0}a}\right)a$$

$$r_0 = a\left(1 + \frac{3\tan\left(\sqrt{V_0}a\right) - \sqrt{V_0}a\left(3 + \left(\sqrt{V_0}a\right)^2\right)}{3\sqrt{V_0}a\left(\sqrt{V_0}a - tan\sqrt{V_0}a\right)^2}\right)$$