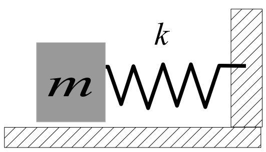
Prof: Sergio Vera

Sistemas con un grado de libertad (SDOF)

1. Una masa de 0,453 kg unida a un resorte liviano introduce un alargamiento de 7,87 mm. Determine la frecuencia natural del sistema. Graficar la posición en función del tiempo.
2. Un sistema resorte-masa k_1, tiene una frecuencia natural f_1 Si se añade un segundo resorte en serie k_2, la frecuencia natural ses reduce a ½ f_1. Halle k_2 en términos de k_1
3. Una masa de 4,53 kg unida al extremo inferior de un resorte cuyo extremo superior está fijo, vibra con un período natural de 0,45 seg. Halle el período natural cuando se conecta una masa de 2,26 kg, al punto medio del mismo resorte con los dos extremos del resorte, fijos.
4. Una masa desconocida m unida al extremo de un resorte desconocido k, tiene una frecuencia natural de 94 cpm. Cuando se añade una masa de 0,453 kg a m, la frecuencia natural se baja 76,7 cpm. Determine la masa m y la constante k N/m.
5. La ecuación de movimiento $m\ddot{x}=-kx$ con $\omega^2=\dfrac{k}{m}$ es la ecuación diferencial que describe el movimiento de los sistemas con un grado de libertad, como el que se muestra en la figura



(a) Encuentre la ecuación que rige las oscilaciones de un péndulo puntual y demostrar que en este la caso $\omega^2=g/l$ (figura 2.a)

(b) Encuentre la ecuación que rige las oscilaciones angulares rotacionales del disco cuyo momento de inercia es I y el par restaurador del alambre por radian es C y demuestre que $\omega^2=C/I$ (figura 2.b)

(c) En el sistema mostrado en la figura 2.(c) mostrar que la fuerza por unidad de desplazamiento es 2T/l y que $\omega^2=2T/ml$

(d)Mostrar que la fuerza por unidad de desplazamiento en el sistema de la figura 2.(d) es 2 ρ g y que $\omega^2=2g/l$

fig.2 (a)

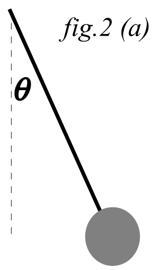


fig.2 (b)

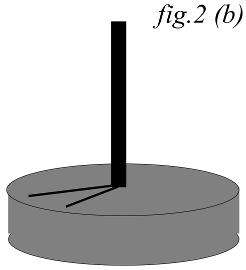


fig.2 (c)

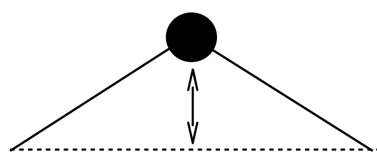
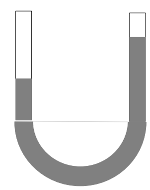
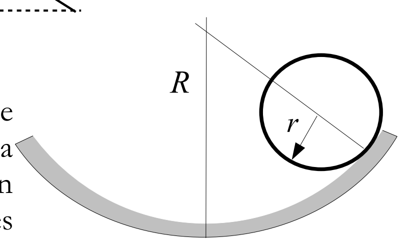


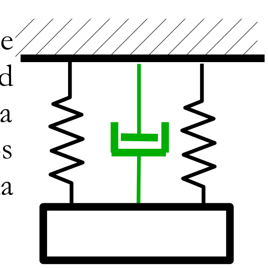
fig.2 (d)

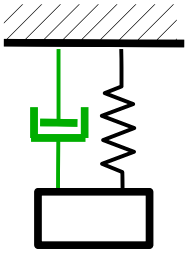


6. Un cilindro de masa m y radio r rueda sin deslizar en una superficie cilíndrica de radio R, como se muestra en la figura. Determinar la ecuación diferencial de equilibrio para pequeñas oscilaciones con respecto al punto más bajo. La condición de no deslizamiento es $r\phi=R\theta$



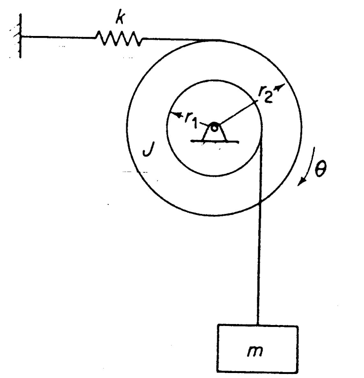
7. El sistema que se muestra en la figura está inicialmente en reposo cuando se le imprime una velocidad de 4 m/s. Encuentre la desplazamiento y la velocidad subsiguiente. Las constantes del sistema son: c= 0.85, k= 25 y m=0.1. Cuál es la amplitud de vibración?, cuándo decae a la mitad dicha amplitud? Cuántos ciclos son necesarios para que decaiga a la mitad la amplitud máxima?.Cuál es la amplitud relativa entre dos máximo?





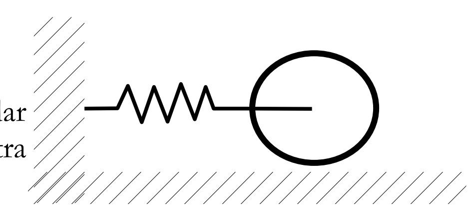
8. La amplitud de vibración de un sistema como el mostrado en la figura decrece un 25 % de su valor inicial después de 5 ciclos consecutivos. Determine el coeficiente de rozamiento c si el sistema posee un k = 20 y m = 2.
   Grafique el desplazamiento en función del tiempo
   Grafique la velocidad en función del tiempo

9. El sistema mostrado está vibrando armónicamente con amplitud θ, a partir de su posición de equilibrio estático, calcule la frecuencia natural del sistema mediante el método de la energía.

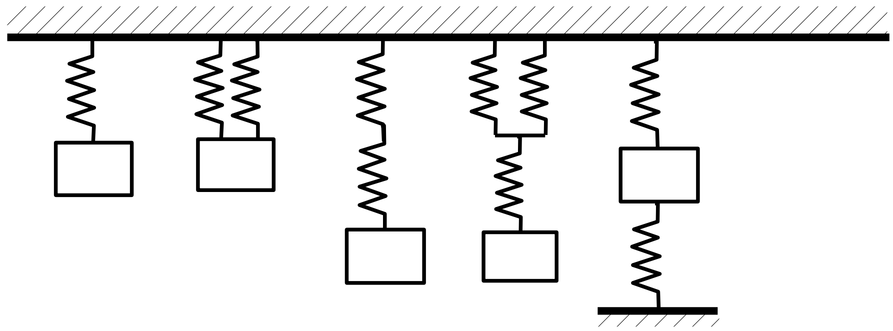


10. (T) Hallar la solución general para un oscilador armónico amortiguado, en el caso de amortiguamiento crítico y deteminar el valor de las contantes en función de la posición y velocidad inicial.
11. (T)Determinar las constantes de la solución general de un sistema sobreamortiguado en función de la posición y velocidad inicial.
12. (T)Determinar las constantes de la solución general de un sistema subamortiguado en función de la posición y velocidad inicial.
13. Una masa M está suspendida del extremo de un resorte de longitud l y constante elástica k. Si la masa del resorte es m y la velocidad de un elemento dy de su longitud es proporcional a si desplazamiento y, desde el extremo fijo del resorte:
   (a) Mostrar que la energía cinética de este elemento es $\frac{1}{2}\left(\frac{m}{l}dy\right)\left(\frac{y}{l}v\right)^2$ donde v es la velocidad de la masa suspendida M.
   (b) Integrando sobre toda la longitud del resorte, mostrar que su energía cinética es $1/6\,m\,v^2$
   (c) De la expresión de la energía total del sistema oscilante, mostrar que la frecuencia de oscilación es
   $$\omega^2 = \frac{k}{M + m/3}$$

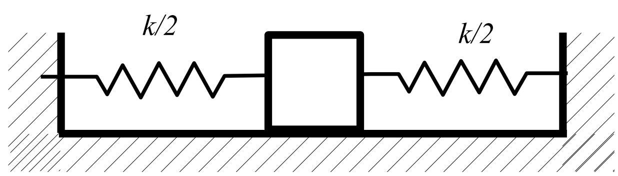
14. Un cilindro de masa m y momento de inercia I es libre de rodar sin deslizar pero está restringido por un resorte k como se muestra en la figura. Halle la frecuencia natural de vibración.



15.Determine la rigidez efectiva de las siguientes configuraciones de resortes.



16.El coeficiente de fričión entre las superficies secas del bloque y el plano es f, un valor constante. La fuerza de fricción actúa siempre oponiéndose al movimiento lo que se conoce como amortiguamiento de Coulomb. Investigar el movimiento del bloque si este es desplazado un cantidad x_0 de la posición central.



17.Un cuerpo sometido a un movimiento oscilatorio sobreamortiguado es desplazado una distancia F de su posición de equilibrio.

(a) Encontrar la velocidad inicial para que la solución sea $x = F\,e^{-rt/2m}\cosh\left(\sqrt{\left(\frac{r^2}{4m^2}-\frac{s}{m}\right)}\right)t$

(b) Dibujar el valor de su desplazamiento versus el tiempo

18.Un capacitor C con carga q_0 en $t=0$ se descarga a través de una resistencia R. Usar la ecuación de voltaje $q/C + IR = 0$ para mostrar que el tiempo de relajación para este proceso es RC segundos, esto es,

$$q = q_0\,e^{-t/RC}$$

(Note que t/RC es adimensional)

19.Mostrar que el factor de calidad de un circuito eléctrico LRC en serie es $Q = \omega_0 L/R$ donde $\omega_0^2 = 1/LC$

20.Mostrar que si $F_0 e^{i\omega t}$ representa $F_0 \sin(\omega t)$ en la forma vectorial (fasorial) de la ecuación de movimiento para el oscilador forzado

$$x = \frac{-F_0}{\omega Z_m}\cos(\omega t - \phi)$$

y la velocidad es

$$v = \frac{F_0}{Z_m}\sin(\omega t - \phi)$$

21.Probar que la amplitud **máxima** del desplazamiento en la condición de resonancia de un oscilador mecánico forzado puede ser escrito $x=F_0/\omega' r$ donde F_0 es la amplitud de la fuerza impulsora y

$$\omega'^2=\frac{s}{m}-\frac{r^2}{4\mathrm{m}^2}$$

22.En un oscilador mecánico forzado mostrar que lo siguiente es independiente de la frecuencia
(a) la amplitud del desplazamiento a bajas frecuencias
(b) la amplitud de la velocidad a la frecuencia de resonancia
(c) la amplitud de la aceleración a altas frecuencias $(\omega\rightarrow\infty)$

23.***(T)*** Demostrar que si un sistema con un grado de libertad posee un movimiento armónico simple (MAS), se cumple que $T_{max}=U_{max}$.

24.***(T)*** Mostrar que para el cociente de amplitudes no-sucesivas (x_i, x_{i+n}) para el caso de movimiento subamortiguado se cumple que

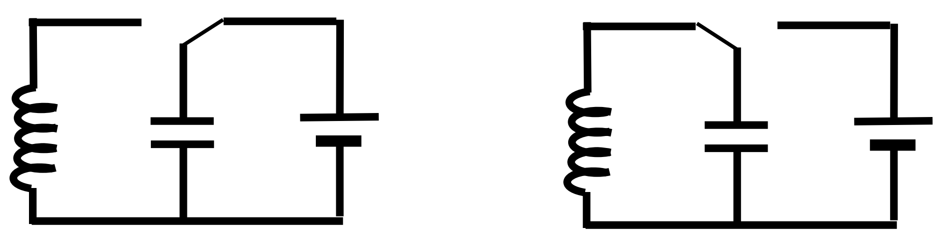
$$\ln\left(\frac{x_i}{x_{i+n}}\right)=n\,\delta$$

25.Resolver el problema de las oscilaciones forzadas de un oscilador armónico cuya masa es m, su constante elástica es k y el coeficiente de amortiguamiento es c. La fuerza externa es $F(t)=\sin(\omega t)$
(a) Hallar el desplazamiento *x(t)*, la velocidad $\dot{x}(t)$ y la aceleración $\ddot{x}(t)$
(b) Hallar las frecuencias a las que cada una de estas funciones alcanzan su valor máximo
(c) Hallar los valores máximos *x(t),* $\dot{x}(t)$ *y* $\ddot{x}(t)$

26.Dibujar las curvas $|X/x_{est}|$ y ϕ en función de ω para valores de ζ=0.05, 0.1, 0.15, 0.25, 0.375, 0.5 y 1.0

Problemas adicionales

A.1.- En la figura se muestra un arreglo que puede ser utilizado para piner a oscilar un circuito *LC*. El capacitor es cargado a un voltaje V_1 por medio de una batería. En el instante *t=0* el interruptor se acciona para que la coriente fluya por la bobina. Derivar:
(a) la amplitud de la corriente
(b) la constante de fase



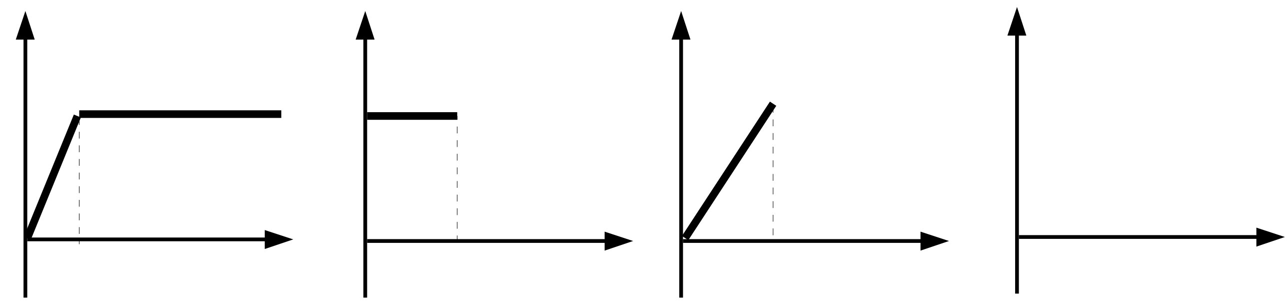
A.2.- Para un oscilador de masa m=0.010 kg y k= 36 Nm^{-1}.
(a) Qué valor de la constante de amortiguamiento haría que la amplitud decrezca de A al valor A/e en 1 s.?
(b) Cuál es el valor del Q del sistema?

(c) Qué valor de la constante de amortiguamiento producirá el caso crítico?

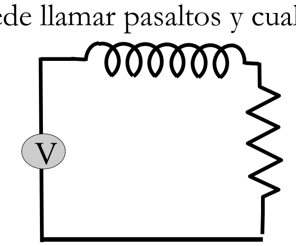
A.3.- Mostrar que la amplitud de un oscilador amortiguado cae a la mitad en un tiempo igual a $1{,}39/\gamma$ siendo $\gamma = c/m$.

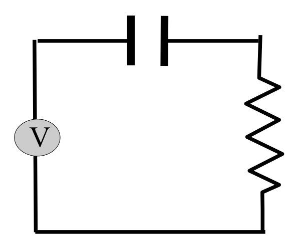
A.4.- En el instante inicial un sistema con un grado de libertad (SDOF) se encuentra en reposos y en equilibrio. Determinar las oscilacones forzadas del sistema debidas a una fuerza F(t) en los siguientes casos:
(a) $F=F_0$ = cte.
(b) F = a t
(c) $F = F_0\, e^{-\alpha t}$
(d) $F = F_0\, e^{-\alpha t} \cos(\beta\, t)$

A.5.- Determinar la amplitud final de las oscilaciones de un sistema bajo la acción de una fuerza como la que se muestra en las figuras. En el instante inicial el cuerpo se encuentra en reposo y en equilibrio.

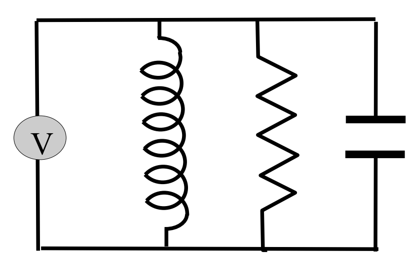


A.6.- La figuras muestran dos circuitos denominados filtros. Analizar el la respuesta en frecuencia para el caso en que el voltaje es $V(t) = V_0 \cos j\omega t$.
(a) Hallar la impedancia equivalente.
(b) Graficar V_r/V, siendo V_r el voltaje en la resistencia
(c) Cuál de estos se puede llamar pasaltos y cual pasabajos?

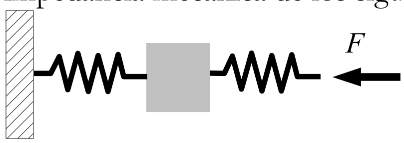


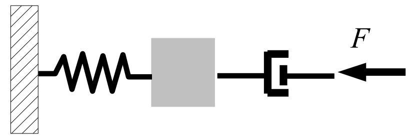


A.7.- La figura muestra un circuito RLC excitado por un voltaje $V(t) = V_0 e^{j\omega t}$. Suponga que los valores de la resistencia, inductancia y capacidad son *R= 25 Ω, L= 4 mH y C=2 μF* respectivamente.
Hallar:
(a) la impedancia equivalente del ciruito
(b) una expresión para el módulo de la corriente y la fase en función de ω
(c)Graficar
(d)Hallar la potencia promedio consumida en la resistencia



A.8- Hallar la impedancia mecánica de los siguientes sistemas





A.9- Para mantener las vibraciones de estado estacionario de un oscilador armónico simple amortiguado forzado es necesario proveer de energía para reemplazar la disipada por el amortiguamiento.
Potencia