Prof: Dr. Sergio Vera

Sistemas con múltiples grados de libertad.

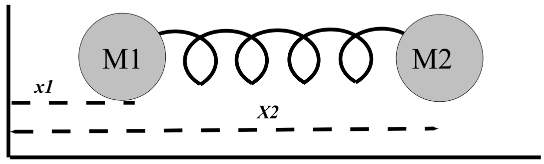
Problema 1

En la figura dos masas m_1 y m_2 están acopladas por un resorte de constante k y longitud natural l. Si x es la extensión del resorte mostrar que las ecuaciones de movimiento a lo largo del eje x son

$$m_1 \ddot{x}_1 = k x \quad \text{y} \quad m_2 \ddot{x}_2 = k x$$

y combinarlas para mostrar que el sistema oscila con una frecuencia

$$\omega^2 = \frac{k}{\mu} \quad \text{donde} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{es la masa reducida.}$$

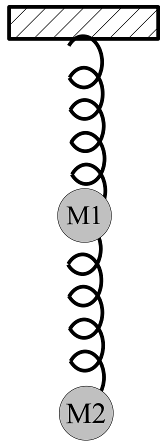


Problema 2

Las mas iguales de la figura oscilan en la dirección vertical. Mostrar que las frecuencias de los modos normales de oscilación están dados por

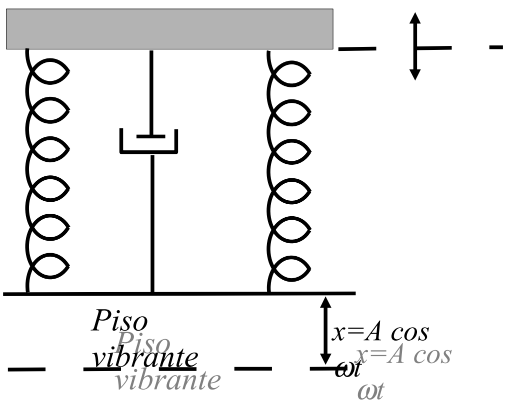
$$\omega^2 = (3 \pm \sqrt{5}) \frac{k}{2\text{m}}$$

y que en el modo menor el cociente de ls amplitudes de la masa de arriba sobre la de abajo es $\frac{1}{2}\sqrt{5} - 1$ mientras que en el modo más rápido el cociente es $\frac{1}{2}\sqrt{5} + 1$



Problema 3

La figura muestra un esquema de una instalación para aislar vibraciones.



Supongamos que una pesada base está conectada al piso, con vibraciones indeseables, por un sistema que modelaremos por su rigidez *k* y resistencia viscosa *c*.

También supongamos que la vibración vertical del piso está dada por $x = A\cos(\omega t)$ alrededor de su posición de equilibrio e *y* es el correspondiente desplazamiento de la base. La función del aislador es mantener que el cociente y/A sea mínimo.

(a) Mostrar que la ecuación de movimiento de la base es

$$m\ddot{y} = -r(\dot{y} - \dot{x}) - k(y - x)$$

(b) Usar el cambio de variable $X = y - x$ para mostrar, usando la solución del estado estacionario de la ecuación diferencial para X que

$$y = \frac{F_0}{\omega Z_m} \sin(\omega t - \phi) + A\cos\omega t$$

y (observando que *y* es la superposición de dos componentes armónicas con diferencia de fase constante) mostra que

$$\frac{y_{max}}{A} = \frac{(r^2 + k^2/\omega^2)^{1/2}}{Z_m} \quad \text{donde} \quad Z_m^2 = r^2 + (\omega m - k/\omega)^2$$

OBSERVACION: Note que sí $\frac{y_{max}}{A} > 1 \; si \, \omega^2 < \frac{2k}{m}$ por lo que *k*/*m* debe ser lo menor posible para dar protección contra una dada *w*.

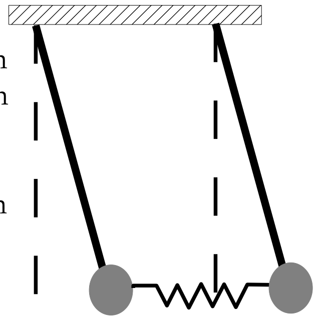
(c) Mostrar que $\frac{y_{max}}{A} = 1$ para $\omega^2 = \frac{2k}{m}$

(d) Mostrar que $y_{max}/A < 1 \; para \, \omega^2 > \frac{2k}{m}$

(e) Mostrar que si $\omega^2 = k/m$ entonces $y_{max}/A > 1$ pero que el término viscoso r es útil para mantener el movimiento de la base a niveles razonablemente bajos

(f) Mostrar que si $\omega^2 > 2k/m$ entonces $y_{max}/A < 1$ pero ahora el amortiguamiento es perjudicial

Problema 4



En la figura se muestran dos péndulos que están acoplados por medio de un resorte débil de constante *k*, no estirado cuando los péndulos están en posición vertical. ambas masas son de 1.00 kg y la constante es 0.8 N m^{-1}.

(a) Determine los modos normales. Encontrar el período de ambos modos

(b) Si cuando uno de los cuerpos está anclado, el período del otro oscila con un período de 1,25 s.

Problema 5

Mostrar que la energía potencial de dos péndulos simples acoplados por un resorte puede expresarse como $a X^2 + b Y^2$, donde X y Y son las coordenadas normales y a y b son constantes. Mostrar que la energía cinética puede expresarse como $c \dot{X}^2 + d \dot{Y}^2$ donde c y d son constantes. Evaluar a,b,c y d en términos de *k,l, m* y *g*.

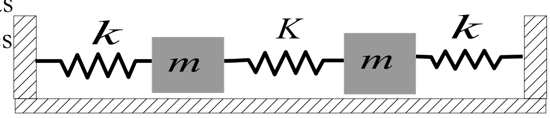
Problema 6

Expresar la energía total del problema anterior en término de los desplazamientos x e y de cada péndulo como

$$E = (E_{cin} + E_{pot})_x + (E_{cin} + E_{pot})_y + (E_{pot})_{xy}$$

donde el paréntesis dada la energía de cada péndulo expresada en sus propias coordenadas y $(E_{pot})_{xy}$ es el acoplamiento o intercambio de energía que involucra el producto de coordenadas.

Problema 7



En un sistema simétrico, como el mostrado en la figura, las coordenadas normales tienen los valores $q_1 = 1.36 \times 10^{-3} kg^{1/2} m$ y $q_2 = -0.34 \times 10^{-3} kg^{1/2} m$ en cierto instante.

Calcular Ψ_1 , Ψ_2 y el cociente de los desplazamientos (en el mismo instante) si $m = 0.020 kg$

Problema 8

Un sistema simétrico, como el de la figura anterior, es puesto a oscilar moviendo en el punto medio del resorte central con una frecuencia angular ω. Mostrar que en el estado estacionario, el modo "en anti-fase" no es excitado a ninguna frecuencia. (Esto ilustra el punto general que la forma en que se mezclan los modos depende de la manera en que la fuerza impulsora es aplicada en el sistema)

Problema 9

Consideremos un sistema similar al de la figura del problema 7 pero ahora con distintos valores de masa y constante elástica, $m_1 = 3m_2$ *y* $k_1 = k_2 = 3K$. Encontrar:

(a) el cociente de la amplitud de los módulos, para el modo "en fase"

(b) lo mismo para el modo en "anti-fase"
(c) el cociente de las frecuencias modales

Problema 10

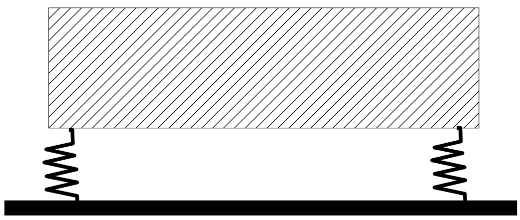
Considere un problema similar al anterior pero ahora el resorte no se mantiene horizontal, sino que se inclina durante el movimiento de las masas. La longitud natural del resorte es *d*
(a) Plantee las ecuaciones de movimiento del sistema utilizando la formulación Lagrangiana sin hacer ninguna simplificación.
(b) Ahora indique el tipo de aproximaciones físicas y geométricas debe realizar para poder resolver el problema.
(c) Encuentre las frecuencias naturales de vibración y los modos normales.
(d) Qué sucede si la longitud propia del resorte $d=0$?

Problema 11

Consideremos las vibraciones forzadas de un sistema similar al del problema 1 pero con masas distintas y sin el resorte del extremo derecho ($k_2=0$). La fuerza armónica se aplica a la masa de la izquierda, m_1. Mostar que, en el estado estacionario, la masa 1 permanecerá quieta si la frecuencia de la fuerza impulsora es $w^2= K/m_2$.

Problema 12

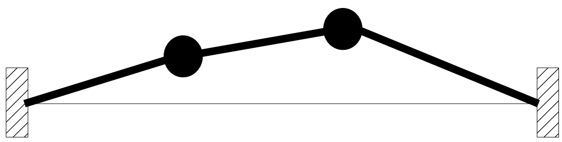
La figura muestra un sistema que puede pensarse como un modelo simple de un automóvil. Como primera aproximación suponga que el centro de masa de la barra no coincide con el centro geométrico y que los resortes tienen constantes elásticas diferentes.



(a) Plantear las ecuaciones movimiento suponiendo que el ángulo que la barra forma con la horizontal es pequeño.
(b) Halle los modos normales de vibración y las frecuencias normales
(c) Lo mismo pero con el centro de masa en el centro de la barra.

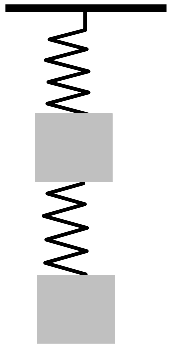
Problema 13

Dos masas m_1 y m_2 están unidas por una cuerda liviana con tensión T, como se muestra en la figura. Suponiendo que la tensión se mantiene constante cuando las masas se desplazan verticalmente, escriba las ecuaciones de movimiento,



(a) escriba las ecuaciones de movimiento
(b) determine las frecuencias normales y las coordenadas normales
(c) Halle expresiones para el caso $m_1=m_2=m$ y también para $m_1=2m$ y $m_2=m$.

Problema 14



(a) Escriba las ecuaciones de movimiento para el sistema mostrado en la figura y determine las frecuencias normales y los modos normales

(b) Si la masa más baja es golpeada súbitamente, impartiéndole una velocidad inicial $\dot{x}_2(0)=V$, hallar las ecuaciones de movimiento

(c) Suponga ahora que las condiciones iniciales son: $x_1(0)=0\,,x_2(0)=X\,,\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$

Problema 15

Considere el sistema similar al anterior pero ahora excitado por una fuerza $F_1=F_0 sen(\omega t)$ sobre la masa de arriba. Determine las amplitudes de ambas masas y grafíquelos en función de la frecuencia angular.

Problema 16

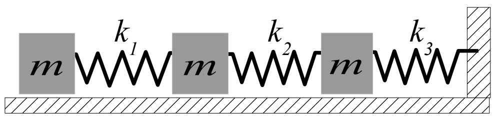
Probar que en el problema 7 $\omega_0=0$ también es solución del problemas. ¿Qué significado físico tiene esto?

Problema 17

El sistema de la figura consiste de 3 masas y 3 resortes, cuyas masas tienen el valor *m_1=2 kg*, *m_2=3 kg* y *m_3=4 kg*. La constante elástica de los resortes son: *k_1= 12 x 10^2 N/m*, *k_2= 24 x 10^2 N/m* y *k_3=36 x 10^2 N/m*. Encontrar

(1) Las matrices **M**, **K** y **x**

(2) Suponiendo una solución de la forma $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\sin(\omega t+\phi)$ obtener las frecuencias propias y los modos de vibración. Dibuje las formas modales



(3) Encontrar las matrices $\mathbf{M_p}$, $\mathbf{K_p}$

(4) Normalizar los modos normales con respecto a la matriz **K** y mostrar que $\boldsymbol{\Phi}_s^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{\Phi}_s=\boldsymbol{I}$ y que

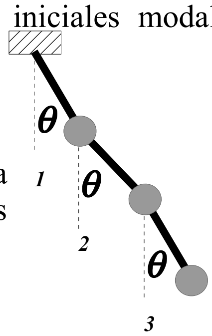
$$\boldsymbol{\Phi}_s^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{\Phi}_s=\begin{bmatrix} 1/\omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\omega_3^2 \end{bmatrix}$$

(5) Suponiendo que las condiciones iniciales son

$$\boldsymbol{X}_0=\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.05 \\ 0.01 \end{bmatrix} \qquad \dot{\boldsymbol{X}}_0=\begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix}$$

(6) Hallar la inversa de la matriz modal $\boldsymbol{\Phi}^{-1}$ y calcule las condiciones iniciales modales $\boldsymbol{q}_0\,y\,\dot{\boldsymbol{q}}_0$ para obtener los modos normales $\boldsymbol{q}(t)$

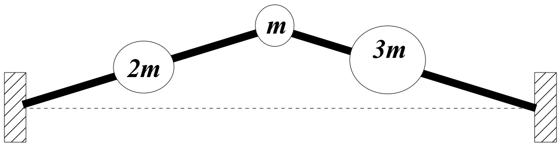
Problema 18



Obtenga la ecuación diferencial de movimiento del sistema mostrado en la figura y determine las frecuencias naturales de oscilación y las formas modales para pequeñas oscilaciones, suponiendo que: $m_1=m_2=m_3=1\,kg\,,l=0.5\,m$

Problema 19

Calcule las frecuencias naturales de las tres masas de distinta masa sujetas por una cuerta tensionada como muestra la figura. Suponga que los desplazamientos son pequeños.



Problema 20

Considere en el problema anterior que sobre la masa central actúa una fuerza del tipo $F_0 \sin \omega t$. Determine el movimiento de estado estacionario.

Problema 21

Considere un sistema similar al del problema uno pero con cinco masas (m_i=4)y seis resortes (k_i=3), utilizando MATLAB resuelva los siguientes tópicos:

a) Halle las frecuencias naturales y los modos normales del sistema y verifique las relaciones de ortogonalidad y normalización de las coordenadas normales

b) Si los desplazamientos iniciales son $x_i=1$, encuentre el movimiento subsiguiente de las masas

c) Idem al anterior pero ahora $x_1=x_2=1$, $x_3=0$ y $x_4=x_5=-1$

d)Encuentre un desplazamiento inicial para cada masa de tal manera que solamente excite el modo fundamental del sistema.

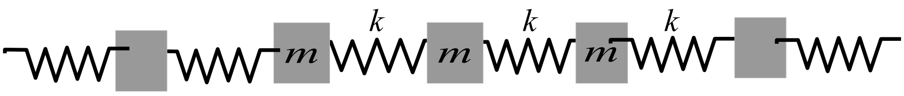
e) Si la velocidad de la masa central es $v_3=1$ y el resto nulas, escriba las ecuaciones de movimiento correspondientes a cada masa

f) Si $m_3 >> mi$ $i \neq 3$ (por ejemplo $m_3= 10^6$ mi) explique cualitativamente los resultados obtenidos para los modos normales de vibración.

g)Para un sistema similar al del inciso a pero con diez masas grafique para el modo fundamental los desplazamientos relativos en función de la posición de cada masa. Compare con el movimiento de una cuerda sometida a una tensión T entre sus extremos fijos que oscila en su frecuencia fundamental. Explique.

Problema 22

Consideremos un problema de una cadena infinita de masas y resortes



(a) Plantee la ecuación de movimiento para la partícula s
(b) Halle la ecuación resultante luego de proponer una dependencia temporal de la forma $e^{j\omega t}$
(c) Por la simetría del problemas, puede ser diferente la amplitud del movimiento de la partícula s de la s+1 ó s-1?. Si su respuesta es negativa, en que puede diferir u_s de u_{s+1} y u_{s-1}?
(d) Reemplace en la ecuación hallada en b $u_{s\pm1} = u\, e^{\pm jKa}$, siendo a el espaciado y halle una relación entre ω y K. Grafíquela