ELECTROMAGNETISMO II

Guia 2: Ondas en Medios Dispersivos

April 17, 2012

Ondas en Medios Dieléctricos

Problema 1

Una partícula cargada (carga Ze) se mueve con velocidad constate $\mathbf{v}$ a través de un medio de función dieléctrica $\epsilon(\mathbf{q},\omega)/\epsilon_0$ o, equivalentemente por una función conductividad $\sigma(\mathbf{q},\omega) = i\omega[\epsilon_0 - \epsilon(\mathbf{q},\omega)]$. Se desea calcular la pérdida de energía por unidad de tiempo en términos de la función dieléctrica $\epsilon(\mathbf{q},\omega)$ en la aproximación que el campo eléctrico es el menos gradiente de potencial, y el flujo de corriente obedece la ley de Ohm $\mathbf{J}(\mathbf{q},\omega) = \sigma(\mathbf{q},\omega)\,\mathbf{E}(\mathbf{q},\omega)$.

A) Mostrar que con una adecuada normalización la transformada de Fourier de la densidad de carga de la partícula es:

$$\rho(\mathbf{q},\omega) = \frac{Ze}{2\pi^3}\,\delta(\omega - \mathbf{q}\cdot\mathbf{v}) \tag{1}$$

B) Mostrar que la transformada de Fourier del potencial escalar es:

$$\phi(\mathbf{q},\omega) = \frac{\rho(\mathbf{q},\omega)}{q^2\,\epsilon(\mathbf{q},\omega)} \tag{2}$$

C) Utilizando $\frac{dW}{dt} = \int \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$ mostrar que las pérdida de energía por unidad de tiempo puede ser escrita como:

$$-\frac{dW}{dt} = \frac{Z^2e^2}{4\pi^3}\int\frac{d^3q}{q^2}\int_0^\infty d\omega\,\omega\,Im[\frac{1}{\epsilon(\mathbf{q},\omega)}]\,\delta(\omega - \mathbf{q}\cdot\mathbf{v}) \tag{3}$$

Problema 2

Investigue en que consiste un Interferometro de Fabri-Perot. Encuentre de que depende la frecuencia ω_0 que caracteriza a la banda de transmision.

Ondas en Medios Conductores

Problema 3

Encuentre el coeficiente de transmision para incidencia normal de una lamina de muy buena conductividad σ y espesor d. Estudie la dependencia funcional en terminos de σ y d.Analice el limite $\sigma \to \infty$ y $d \to 0$ simultaneamente.

Problema 4

Una onda plana de frecuencia ω incide normalmente desde el vacío a un material semi-infinito con índice de refracción complejo $n(\omega) = [n^2(w) = \epsilon(\omega)/\epsilon_0]$.

a) Mostrar que el cociente entre la potencia reflejada y trasmitida con la incidente es:

$$\begin{cases} R = |\frac{1-n(\omega)}{1+n(\omega)}|^2 \\ \\ T = \frac{4Re[n(\omega)]}{|1+n(\omega)|} \end{cases}$$

b) Para un cconductor con $n^2 = 1 + i(\sigma/\omega\epsilon_0)$, con σ real, escribir el resultado anterior en el límite $\epsilon_0\omega << \sigma$.

Problema 5

Discutir la extensión de la relación de Kramers-Kronig relations:

$$\begin{cases} Re\,\epsilon(\omega)/\epsilon_0 = 1 + \frac{1}{\pi} P \int_0^\infty \frac{[Im\,\epsilon(\omega') - \epsilon_0]}{\omega' - \omega}\, d\omega' \\ Im\,\epsilon(\omega)/\epsilon_0 = -\frac{1}{\pi} P \int_0^\infty \frac{[Re\,\epsilon(\omega')/\epsilon_0 - 1]}{\omega' - \omega}\, d\omega' \end{cases}$$

para un medio con conductividad eléctrica estática σ. Mostrar que la primera ecuación no cambia, pero la segunda se modifica por:

$$Im\,\epsilon(\omega) = \frac{\sigma}{\omega} - \frac{2\omega}{\pi} P \int_0^\infty \frac{[Re\,\epsilon(\omega') - \epsilon_0]}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \qquad (4)$$

Ayuda: Considere $\epsilon(\omega) - \frac{i\sigma}{\omega}$ como una función analítica para $Im\omega \geqq 0$.

Ondas en Plasmas

Problema 6

En un modelo sencillo la ionosfera puede ser considerada como un medio de constante dielectrica $\epsilon(\omega) = \epsilon_0(1 - \omega_P^2/\omega^2)$. Considere que la tierra contiene tal medio comenzandose a una altura h y extendiéndose hasta infinito. Para ondas con polarización perpendicular al plano de incidencia (para el caso de antenas horizontales) y paralela al plano de incidencia (para antenas verticales)

A) Mostrar de las ecuaciones de Fresnel para la reflexión y refracción que para $\omega > \omega_P$ existe un rango de ángulos de incidencia para los cuales la reflexión no es total, pero para águlos mayores hay reflexión total hacia la tierra.

B) Un amateur opera una radio a una longitud de onda de 21 mts y encuentra que al anochecer puede recir senãles de estaciones localizadas a 1000 km de distancia, pero no menos. Suponiendo que las señales son reflejadas de la capa F de la ionosfera a una altura de 300km, calcular la densidad electrónica. Comparar con los valores conocidos de densidades $\sim 2 \times 10^{12} m^{-3}$ (durante el día) y $\sim 2 - 4 \times 10^{11} m^{-3}$ (durante la noche).

Problema 7

La dependencia temporal de señales eléctricas en buenos conductores is governada por la ecuación:

$$\sigma = \frac{f_0 N e^2}{m(\gamma_0 - i\omega)} \tag{5}$$

Considere campos eléctricos longitudinales en un conductor, usando la ley de Ohm, la ecuación de ccontinuidad y la forma diferencial de la ley de Coulomb

A) Mostrar que la transformada de Fourier de la densidad de carga satisface la ecuación:

$$[\sigma(\omega) - i\epsilon_0\omega]\rho(\mathbf{x}, \omega) = 0 \tag{6}$$

B) Usando la representación $\sigma(\omega) = \sigma_0/(1 - i\omega_0\tau)$, donde $\sigma_0 = \epsilon_0\omega_P\tau$,y τ es un tiempo de decaimiento, mostrar que en la aproximación $\omega_P\tau \gg 1$ toda perturbación inicial oscila co l frecuencia de plasma y decae con la constante de decaimiento $\lambda = 1/2\tau$. Note que si se usa $\sigma(\omega) = \sigma_0$ no se observan oscilaciones y solo un amortiguamiento erroneamente rápido $\lambda = \sigma_0/\epsilon_0$.