

ELECTROMAGNETISMO II

Guía 4: Guías de Onda

El día de entrega de esta guía es el 26/04. Se deben entregar resueltos los problemas impares.

Temas correspondientes a clases 6 a 9

1. Estudie los modos de propagación de una guía de ondas de sección rectangular de lados a y b , llena de material dieléctrico de constantes ϵ y μ . Encuentre:
 - a) Los campos para todos los modos TE y TM
 - b) Las frecuencias de corte, las velocidades de fase y grupo.
 - c) ¿Cuál es el modo más bajo y cuál le sigue ?.
 - d) La potencia media transmitida.
 - e) La presión ejercida sobre las paredes por el modo TE . Indique claramente los recintos de integración de las normales usadas en el cálculo.
 - f) Las guías se usan generalmente en su modo más bajo ajustando las dimensiones de modo que la frecuencia de trabajo esté entre la frecuencia de corte del modo más bajo y el siguiente. Las dimensiones típicas de una guía comercial son de $2.28\text{ cm} \times 1.01\text{ cm}$ (dimensiones internas). Si la guía está llena de aire, calcule el rango de frecuencias en que puede emplearse en la forma descripta.
 - g) Analice en detalle el modo TE .

Hints:

- Observe que sólo depende de la presencia de dos paredes. ¿Existen otros modos con esta propiedad?.
 - Descomponga los campos de este modo en suma de ondas planas viajeras (para ello exprese las funciones trigonométricas como combinación de exponenciales). Analice el vector \mathbf{k} y la orientación de \mathbf{E} y \mathbf{B} para estas ondas. ¿Son estas ondas tipo TE de acuerdo con la definición de ondas planas?.
 - Relacione todo esto con la expresión hallada para la presión sobre las paredes.
2. Una guía de ondas consta de dos capas metálicas perfectamente conductoras, planas y paralelas, separadas por una distancia a . Su ancho es b , con $b \gg a$. Si entre las chapas hay vacío encuentre (despreciando los efectos de borde):
 - a) Los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} para todos los modos TE y TM .
 - b) Las frecuencias de corte. ¿Cuál es el modo más bajo?. Para un modo dado, ¿cómo debe modificarse la guía para disminuir a la mitad la frecuencia de corte?.
 - d) Las velocidades de fase y de grupo. Si se envía un pulso por esta guía, ¿se deforma?. Compare estas velocidades con c . ¿Viola este resultado alguna de las conclusiones de la teoría de la relatividad?. ¿Por qué?.

- e) Calcule la potencia media transmitida usando el vector de Poynting. Vuelva a calcularla usando la fórmula (8.51) del Jackson. Observe si tiene resultados distintos. Discuta cuál es el resultado correcto y a que se debe el error en el uso de la otra expresión.

Hints:

- Este problema, por ser particularmente sencillo, se presta para algunas consideraciones que pueden ayudar a comprender físicamente como se propagan las ondas en una guía.
- Observe que los modos de esta guía coinciden con aquellos del problema 1 (sólo depende de la presencia de dos paredes).
- Descomponga todos los modos TE en suma de ondas viajeras, como se hizo en el problema 1 con el modo TE .
- Analice el vector de propagación \mathbf{k} de estas ondas viajeras. Observe que su módulo coincide con el correspondiente a una onda plana en un dieléctrico sin límites. Halle θ (ángulo que forma el vector \mathbf{k} con el eje Z). ¿Cómo varía θ con la frecuencia y con el orden del modo?. ¿Cuánto vale θ cuando la frecuencia es igual a la de corte?.
- Trate de interpretar las expresiones de la velocidad de fase y de grupo en términos de la velocidad de fase (o de grupo) de una onda plana en un dieléctrico infinito y del ángulo θ .

3. Estudie los modos de propagación en una guía de ondas de sección circular de radio R . Encuentre:

- a) Los campos para todos los modos TE y TM .
b) Las frecuencias de corte. Determine cuál es el modo más bajo.

Hints:

- Esta guía tiene una forma geométrica con simetría azimutal, sin embargo hay modos sin esta simetría. ¿Fallan en este caso los razonamientos de simetría?.

4. Estudie el modo TEM de una guía de ondas coaxial constituida por un conductor interno de radio a y uno externo de radio b . Halle:

- a) Los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} . ¿Las ondas que se propagan son ondas planas?.
b) La potencia media transmitida

Hints:

- Observar que para este modo, los campos presentan la simetría sugerida por la forma geométrica.
- Para este modo, tanto \mathbf{E}_0 como \mathbf{B}_0 (amplitudes de los campos oscilantes) pueden derivarse de un potencial escalar. La sugerencia es que en los problemas con modos TEM trabaje con el potencial para \mathbf{E}_0 .
- Puesto que este problema es muy sencillo, es conveniente que también se intente resolverlo con el potencial para \mathbf{B}_0 , para ver las ventajas y desventajas de uno y otro método. Las ventajas del uso del potencial para \mathbf{E}_0 son:

- (1) La condición de contorno para el potencial de \mathbf{E}_0 obliga a la solución tener la misma simetría que presenta la forma geométrica del recinto. Esto no vale para el potencial de \mathbf{B}_0 , más aún, como \mathbf{B}_0 y \mathbf{E}_0 son perpendiculares, y el potencial de \mathbf{E}_0 tiene la misma simetría del recinto, seguramente el potencial de \mathbf{B}_0 no cumple las condiciones de contorno.
- (2) El potencial de \mathbf{B}_0 resulta a menudo multivaluado. Analice la multivaluación de dicho potencial en este problema. Demuestre que está relación con la corriente que circula por el conductor interno. Discuta por qué el potencial de \mathbf{E}_0 no resulta nunca multivaluado.
5. Analice el modo *TEM* para la guía del problema 2. Despreciando los efectos de borde encuentre:
- Los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} . ¿Son planas las ondas que se propagan?.
 - La frecuencia de corte para este modo.
 - La velocidad de fase y de grupo. Compárela con la velocidad de la luz en el medio. ¿Se deforma un paquete de ondas al viajar por esta guía en el modo *TEM*?.
 - La potencia media transmitida.
6. Estudie la atenuación en las guías de onda de los problemas anteriores debida a la conductividad finita de las paredes. En particular halle la potencia disipada por unidad de longitud y la constante de atenuación para los casos:
- Modo *TE* de la guía del problema 1.
 - Modo *TE* de la guía del problema 2.
 - Modo *TM* de la guía del problema 3.
 - Modo *TEM* de la guía del problema 5.
 - Calcule la distancia en que la potencia se atenúa un factor $1/e$ para la guía del problema 1. Las paredes de la guía son de cobre ($\sigma = 5.9 \times 10^7 \text{ mhos/m}$, y la frecuencia de trabajo es de 10 GHz).
7. Se tiene una cavidad de sección rectangular de lados a , b y c . Encuentre:
- Los campos para todos los modos *TE* y *TM*.
 - Las frecuencias de resonancia. ¿Cuál es el modo más bajo?.
 - Calcule el Q de la cavidad para el modo *TM*. En particular haga el cálculo numérico para una cavidad de paredes de cobre de $2.3 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$. La cavidad está llena de aire.
8. Considere una cavidad cilíndrica de radio a y longitud d .
- Halle las frecuencias de resonancia de los diferentes modos *TM* y *TE*. Determine los modos *TE* y *TM* más bajos, y los campos correspondientes.

- b) Si $a = 1 \text{ cm}$ y $d = 1.5 \text{ cm}$, calcule las frecuencias de resonancia de estos modos y determine cuál es el más bajo. Calcule el rango de variación de d si se quiere sintonizar frecuencias comprendidas entre los 70 y 75 Ghz .
9. Encuentre los modos resonantes para una cavidad esférica de radio a