Separación de Variables para la Ecuación de laplace en Coordenadas Esféricas

ESTE APUNTE EN CONSTRUCCIÓN NO REEMPLAZA A LOS LIBROS Y PUEDE CONTENER ERRORES DE TIPEO!!!

4 de septiembre de 2014

Índice

1. Ecuación de Laplace en coordenadas esféricas

El operadoer laplaciano en coordenadas esféricas es

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \tag{1}$$

En este sistema también es posible encontrar una solución en forma de producto de tres funciones de una variable:

$$\Phi(r,\theta,\phi) = R(r)P(\theta)Q(\phi) = U(r)P(\theta)Q(\phi)/r. \tag{2}$$

Operamos en Φ con ∇^2, e igualamos el resultado a cero encontrando:

$$\frac{PQ}{r}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{UQ}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \frac{UP}{r^3\sin^2\theta}\frac{d^2Q}{d\phi^2} = 0 \tag{3}$$

Multplicamos por $r^3\sin^2\theta/UPQ$ y encontramos

$$\frac{r^2\sin^2\theta}{U}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{\sin\theta}{P}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\phi^2} = 0. \tag{4}$$

Los primeros dos téminos son independientes de ϕ mientras que es tercero solo depende de esta coordenada. Por lo tanto el tercer término debe ser una constante, lo mismo que la suma de los dos primeros; la primaera de estas condiciones es

$$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\phi^2} = C \text{ or } \frac{d^2Q}{d\phi^2} = CQ, \tag{5}$$

de la cual deducimos que $Q \sim e^{\sqrt{C}\phi}$.

Ahora bien , un cambio en ϕ por 2π no corresponde a ningún cambio en la posición espacial (ya que solo hemos dado una vuelta completa a esta coordenada cíclica y estamos en el mismo lugar). Por lo que debemos tener $Q(\phi + 2\pi) = Q(\phi)$ porque una función que describa una cantidad medible debe ser una función univaluada de la posición. De esto concluimos que $\sqrt{C} = im$ donde m es un entero de modo que $e^{im2\pi} = 1$. Así $C = -m^2$, y $Q(\phi) \to Q_m(\phi) = e^{im\phi}$, con $m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$. Reconocemos que las funciones Q_m pueden ser usadas para construir una serie de Fourier y que son un set completo y ortogonal en el intevalo $\phi_0 \leq \phi \leq \phi + 2\pi$.

Volviendo a la ecuaciónde Laplace Eq. (4), y usando $-m^2$ para $\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\phi^2}$, encontramos

$$\frac{r^2 \sin^2\theta}{U}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{\sin\theta}{P}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) - m^2 = 0 \tag{6}$$

o

$$\frac{r^2}{U}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}m^2 = 0. \tag{7}$$

En esta expresion reconocemos que el primer término solo depende de r y los siguientes dos solo de θ, de modo que concluimos igual que hicimos antes que cada termino debe ser igual a una constante y que esas constantes deben sumar cero. La primera ecuación que extraemos esando este razonamiento es:

$$\frac{d^2U}{dr^2} = \frac{A}{r^2}U \tag{8}$$

donde A es una constante. Por una convención que entenderemos más adelante (pero que no cambia en nada nuestra deducción) escribiremos A como $l(l + 1)$ lo cual sigue siendo completamente general si permitimos que l pueda ser compleja. La ecuación anterior entonces queda:

$$\frac{d^2U}{dr^2} = \frac{l(l+1)}{r^2}U. \tag{9}$$

Hay dos soluciones a esta ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden tienen la forma $U \sim r^{l+1}$ y $U \sim 1/r^l$. Antes de desarrollar más esto miremos la ecuación para $P(\theta)$.

1.1. Ecuación y polinomios de Legendre

La sustitución de $l(l + 1)$ en el primer término de la Eq. (7) produce

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)P = 0. \tag{10}$$

Resulta que esta ecuación ya ha sido extensament estudiada, y se denomina *Ecuación generalizada de Legendre*; comunmente se la escribe en términos de otra variable $u \equiv \cos\theta$. En ese caso nos queda

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) = \frac{du}{d\theta}\frac{d}{du}\left(\sqrt{1-u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{dP}{du}\right) = -\sqrt{1-u^2}\frac{d}{du}\left(-(1-u^2)\frac{dP}{du}\right) \tag{11}$$

y

$$l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} = l(l+1) - \frac{m^2}{1-u^2}; \tag{12}$$

o sea

$$\frac{d}{du}\left((1-u^2)\frac{dP}{du}\right)+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{1-u^2}\right)P=0 \tag{13}$$

es la forma de la ecuación generalizada de Legendre en término de la variable u. El intervalo de interés para nosotros es $0 \leq \theta \leq \pi$ o equivalentemente $-1 \leq u \leq 1$.

Discutamos primero el caso especial $m = 0$ que corresponde a $Q(\phi) = 1$, o, un sistema en el que $\Phi(\vec{\mathbf{x}})$ es independiente de ϕ; llamaremos a un sistema así un potencial con *simetría azimutal*; Hay muchos sistemas de interés que exhiben esta propiedad de simetría azimutal. La ecuación para P es

$$\frac{d}{du}\left((1-u^2)\frac{dP}{du}\right)+l(l+1)P=0, \tag{14}$$

llamada simplemente *Legendre equation*.

El procedimiento estándard para resolver esta ecuación (y otras ecuaciones diferenciales similares de segundo orden) es suponer que la solución puede escribirse como una serie de potencias. deber haber una potencia mínima en la serie α de modo que podemos escribir

$$P(u)=u^\alpha\sum_{j=0}^{\infty}a_j u^j=\sum_{j=0}^{\infty}a_j u^{j+\alpha} \tag{15}$$

De la cual podemos evaluar las derivadas como

$$\frac{dP}{du}=\sum_{j=0}^{\infty}(j+\alpha)a_j u^{j+\alpha-1}, \tag{16}$$

$$\frac{d^2P}{du^2}=\sum_{j=0}^{\infty}(j+\alpha)(j+\alpha-1)a_j u^{j+\alpha-2}, \tag{17}$$

y

$$-\frac{d}{du}u^2\frac{dP}{du}=-\sum_{j=0}^{\infty}(j+\alpha)(j+\alpha+1)a_j u^{j+\alpha}. \tag{18}$$

Sustituyendo en la ecuación de Legendre obtenemos

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left[(\alpha+j)(\alpha+j-1)u^{\alpha+j-2}a_j-(\alpha+j)(\alpha+j+1)u^{\alpha+j}a_j+l(l+1)u^{\alpha+j}a_j\right]=0, \tag{19}$$

o, si corremos el cero de j en cada término de modo de agrupar potencias de u,

$$\begin{aligned}&\alpha(\alpha-1)u^{\alpha-2}a_0+\alpha(\alpha+1)a_1u^{\alpha-1}+\\ &\sum_{j=0}^{\infty}\left[(\alpha+j+2)(\alpha+j+1)a_{j+2}+\left(l(l+1)-(\alpha+j)(\alpha+j+1)\right)a_j\right]u^{\alpha+j}=0.\end{aligned} \tag{20}$$

El único modo de que esta serie de potencias sea nula para todo u en el intervalo es que se anule cada coeficiente individual de cada potencia de u. Hagamos una lista de coeficientes:

j	Coeficiente de $u^{\alpha+j}$
-2	$a_0\alpha(\alpha-1)$
-1	$a_1\alpha(\alpha+1)$
$j \geq 0$	$\left[(\alpha+j+2)(\alpha+j+1)a_{j+2}+\left(l(l+1)-(\alpha+j)(\alpha+j+1)\right)a_j\right]$

El coreficiente para el término dominante (menor potencia) $j = -2$ es cero si $\alpha = 0$ o 1; $a_0 = 0$ no es una opción válida porque por definición el primer término en la expansión tiene un coeficiente que no se anula. Entonces tenemos dos valores posibles para α.

$$\alpha = 0, 1 \tag{21}$$

Para que el coeficiente de la siguiente potencia $j = -1$ de u se anule debemos tener $\alpha = 0$ or $a_1 = 0$ (o ambos); no podemos tener $\alpha = -1$ por nuestra primera condición. Finalmente, la condición de que el coeficiente de $u^{\alpha+j}$ se anule para $j \geq 0$ es

$$a_{j+2} = \frac{(\alpha+j)(\alpha+j+1) - l(l+1)}{(\alpha+j+1)(\alpha+j+2)} a_j. \tag{22}$$

Esto es lo que se denomina una *relación de recurrencia*.

Miremos que sucede en esta relación cuando j es mucho mayor que 1. En este límite la relación se simplifica a $a_{j+2} = a_j(1 + \mathcal{O}(1/j))$ lo que producirá una serie de potencias (para potencias grandes) que será una suma de téminos proporcionales a u^{2j}, todos con el mismo coeficiente. Para $u \to 1$, esta suma no convergerá por lo que P será singular en $u = 1$. Este comportamiento no es posible para una solución de la ecuación de Laplace, de modo que no podemos tener una función así para representar el potencial. la única salida es que en realidad la serie se termine en un número finito de términos, o sea debe haber un j tal que $a_j \neq 0$ mientras $a_{j+2} = 0$. Examinando la Eq. (22), vemos que este j cumple

$$(\alpha+j)(\alpha+j+1) - l(l+1) = 0. \tag{23}$$

Esta condición requiere que $\alpha + j = l$ lo que es una condición sobre l; como α es 0 o 1, y j es un entero no negativo, entonces l debe ser un entero igual o mayor que α.

$$l \in \mathcal{Z} \quad l \geq \alpha \tag{24}$$

Ahora bien, nuestra relación de recurrencia nos da a_{j+2} a partir de a_j; por lo tanto partiendo de a_0, podemos obtener solamente los coreficientes pares a_j, j par, y partiendo de a_1, obtenemos los impares . Consideremos entonces las series par e impar por separado. Primero consideremos la **serie par**. Como al finalizar la serie $\alpha + j = l$, vemos que l es par cuando $\alpha = 0$ y l es impar cuando $\alpha = 1$. Así la serie par termina cuando

$$\begin{gathered} \alpha = 0 \text{ and } l \text{ par} \\ \alpha = 1 \text{ and } l \text{ impar} \end{gathered} \tag{25}$$

Aplicando argunmentos suimilares a la **serie impar**, vemos que ésta termina cuando

$$\begin{gathered} \alpha = 0 \text{ and } l \text{ impar} \\ \alpha = 1 \text{ and } l \text{ par} \end{gathered} \tag{26}$$

Como l no puede ser a la vez par e impar, solo podemos tener una serie par o una impar (en realidad las series son equivalentes), y la otra debe ser cero.

Como por convención elegimos que $a_0 \neq 0$, la serie impar es la que debe desaparecer, y entonces tenemos $a_1 = 0$. Recordando que l es impar cuando $\alpha = 1$ y es par cuando $\alpha = 0$, vemos que las soluciones son polinomios de grado l. A estos polinomios se los conoce, obviamente, como *Polinomios de Legendre*. Es facil generar algunos de estos polinomios (salvo por la normalización), partiendo de $l = 0$ y usando la relación de recurrencia. respecto de la normalización, usualmente se elige tal que $P(1) = 1$. Se los etiqueta con un índice l para designar un polinomio en particular. Aqui va una lista de los primeros:

l	$P_l(u)$
0	$P_0(u) = 1$
1	$P_1(u) = u$
2	$P_2(u) = \frac{3}{2}u^2 - \frac{1}{2}$
3	$P_3(u) = \frac{5}{2}u^3 - \frac{3}{2}u$
4	$P_4(u) = \frac{35}{8}u^4 - \frac{15}{4}u^2 + \frac{3}{8}$

Hay otras formas de generar polinomios de Legendre. Por ejemplo la *fomula de Rodrigues*:

$$P_l(u) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{du^l}(u^2-1)^l; \tag{27}$$

O la llamada función generatriz:

$$T(u,x) = (1-2ux+x^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} x^l P_l(u). \tag{28}$$

Si se deriva l veces esta función respecto de x y luego se hace $x = 0$, el resultado es $l!P_l(u)$. Las funciones de Legendre tienen muchas propiedades que vamos a necesitar de vez en cuando. Para un resúmen de éstas, ver por ejemplo, la sección sobre Funciones de Legendre en Abramowitz y Stegun a partir de la página. 332 y también la sección sobre polinomios ortogonales a partir de la p. 771. Aquí resumimos algunas de las propiedades más importantes. En primer lugar, la ortogonalidad y normalización. La integral:

$$\int_{-1}^{1} du P_l(u) P_{l'}(u) = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} \tag{29}$$

expresa la ortogonalidad y la normalización de los polinomios de Legendre.

Consideremos ahora las relaciones de recurrencia que proveen buenas formas de generar valores de estos polinomios en forma numérica (es decir usando un programa en una computadora):

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}\left((1-u^2)\frac{dP_l}{du}\right) + l(l+1)P_l &= 0 \\ (l+1)P_{l+1} - u(2l+1)P_l + lP_{l-1} &= 0 \\ (1-u^2)\frac{dP_l}{du} + luP_l - lP_{l-1} &= 0 \\ \frac{dP_{l+1}}{du} - u\frac{dP_l}{du} - (l+1)P_l &= 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Para el lector interesado en estas cuestiones, cualquier libro de generación numérica de funciones especiales es un buen lugar por donde seguir. Nosotros dejamos aqui estas cuestiones matemáticas y volvemos... a la ecuación de Laplace!

1.2. Solución de problemas con condiciones de contorno con simetríqa azimutal

Usando lo que hemos aprendido en las dos secciones anteriores, nos encontramos ahora en condiciones de construir una solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas en condiciones de invariancia azimutal, es decir, cuando $\Phi(\vec{\mathbf{x}})$ es independiente de ϕ. La forma más general de que esta solución puede tener es

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\theta). \tag{31}$$

Los polinomios de Legendre forman una base completa en el intervalo $-1 \leq u \leq 1$ o $0 \leq \cos\theta \leq \pi$. Cualquier potencial independiente de ϕ en una superficie esférica puede ser expresado como una suma de P_l's. Si el volumen en que la solución debe ser encontrada incluye al origen (o sea al centro de la esfera), entonces ninguno de los términos $\sim r^{-(l+1)}$ puede estar incluido en la suma ya que son singulares en el origen, y el potencial no puede ser singular alli.Similarmente si el volumen se extiende a $r \to \infty$, entonces no se permiten términos $\sim r^l$. En el caso anterior la conclusión es que $B_l = 0$ para todo l, y en este último $A_l = 0$.

Consideremos ahora algunos ejemplos .

1.2.1. Ejemplo: una esfera con un potencial especificado

Una esfera aislada de radio a Está centrada en el origen. Por medio no especificados, el potencial en su superficie se mantiene a

$$\Phi(a, \theta, \phi) = V_o \cos^3(\theta)$$

donde θ Es el ángulo polar. Encontrar $\Phi(r, \theta, \phi)$ Para todo $r > a$.

Este problema tiene simetría azimutal. Entonces, en General,

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\cos\theta).$$

Como nuestro volumen contiene todos los $r > a$, La física pide que $A_l = 0$ para todo l. Las constantes B_l Se determinan entonces igualando los términos en la serie a la condición de borde en la superficie de la esfera. Recordemos que

$P_0(x)$	1
$P_1(x)$	x
$P_2(x)$	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
$P_3(x)$	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
$P_4(x)$	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
$P_5(x)$	$\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

de modo que

$$\Phi(a, \theta, \phi) = V_o \cos^3(\theta) = V_o \left(\frac{2}{5} P_3(\cos(\theta)) + \frac{3}{5} P_1(\cos(\theta)) \right)$$

o sea

$$\Phi(r, \theta, \phi) = V_o \left(\frac{2}{5} \left(\frac{a}{r}\right)^4 P_3(\cos(\theta)) + \frac{3}{5} \left(\frac{a}{r}\right)^2 P_1(\cos(\theta)) \right).$$

1.2.2. hemisferios a potencial opuesto

Para el primer problema, supongamos que necesitamos resolver la ecuación de laplace dentro de una esfera de radio a Dado que en la superficie el potencial está especificado como sigue:

$$\Phi(a, \theta) = \begin{cases} V, & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ -V, & \pi/2 \leq \theta \leq \pi. \end{cases} \tag{32}$$

Entonces la expansión debe tomar la forma

$$\Phi(r,\theta) = V\sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos\theta). \tag{33}$$

Es necesario notar la introducción del factor V En el miembro derecho, junto con el uso de la potencia de a En la suma . Estos incluyen por conveniencia. La escala del potencial y por lo tanto el tamaño del término dominante en la suma viene dada por V La cual da también la correcta dimensión a los términos en la suma; es por lo tanto natural poner este factor en cada término. La potencia de a Están incluidos por la misma razón; r es de la forma a Y tiene las mismas dimensiones de modo que los coeficientes dominantes A_l Son del mismo orden de la unidad y tienen dimensión unidad-

Sobre la superficie esférica,

$$\Phi(a,\theta) = V\sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos\theta). \tag{34}$$

Para encontrar un dado coeficiente A_n, Multiplicamos esta ecuación por $P_n(\cos\theta)$ e integramos sobre $\cos\theta$, Recordando que $d\cos\theta = -\sin\theta d\theta$. Haciendo uso del la ortogonalidad y la normalización de los polinomios de Legendre polynomials, encontramos que

$$\int_0^{\pi} d\theta\Phi(a,\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta = V\sum_{l=0}^{\infty} A_l\left(\frac{2}{2l+1}\right)\delta_{ln} = V\left(\frac{2}{2n+1}\right)A_n, \tag{35}$$

o

$$\begin{aligned} A_n = \frac{2n+1}{2}&\left[\int_0^{\pi/2} d\theta P_n(\cos\theta)\sin\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta P_n(\cos\theta)\sin\theta\right] \\ &= \frac{2n+1}{2}\left[\int_0^1 duP_n(u) - \int_{-1}^0 duP_n(u)\right] \end{aligned} \tag{36}$$

Ahora usamos la propiedad de inversión de los polinomios, $P_n(u) = (-1)^n P_n(-u)$ to conclude that

$$A_n = \frac{2n+1}{2}\left[\int_0^1 duP_n(u) - (-1)^n\int_0^1 duP_n(u)\right] = \begin{cases} 0 & n \text{ even} \\ (2n+1)\int_0^1 duP_n(u) & n \text{ odd.} \end{cases} \tag{37}$$

Para completar la integral en el caso de n impares usamos la relación de recurrencia

$$\frac{dP_{n+1}}{du} = (2n+1)P_n + \frac{dP_{n-1}}{du} \tag{38}$$

de modo que

$$A_n = (2n+1)\int_0^1 duP_n(u) = \int_0^1 du\left[\frac{dP_{n+1}}{du} - \frac{dP_{n-1}}{du}\right] = P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0) \tag{39}$$

Donde hacemos uso del hecho de que $P_n(1) = 1$, independientemente de n. Más aún para l pares,

$$P_l(0) = (-1)^{l/2}\frac{(l-1)!!}{l!!} \tag{40}$$

Donde el signo de doble factorial significa $l!! = l(l-2)(l-4)...(2 \text{ or } 1)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P_{n-1}(0) - P_{n+1}(0) = (-1)^{(n-1)/2}\left[\frac{(n-2)!!}{(n-1)!!} + \frac{n!!}{(n+1)!!}\right] \\ = (-1)^{(n-1)/2}\frac{(n-2)!!}{(n+1)!!}(n+1-n) = (-1)^{(n-1)/2}\frac{(n-2)!!}{(n+1)!!}(2n+1). \end{aligned} \tag{41}$$

Ahora hacemos $n = 2m + 1$, $m = 0,1,2,...$, y tenemos

$$\Phi(r, \theta) = V \sum_{m=0}^{\infty} B_m \left(\frac{r}{a}\right)^{2m+1} P_{2m+1}(\cos\theta) \tag{42}$$

donde

$$B_m = (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!!}(4m+3). \tag{43}$$

Los primeros términos de la expansión son

$$\Phi(r, \theta) = \frac{3}{2}V \left\{ \frac{r}{a}P_1(\cos\theta) - \frac{7}{12}\left(\frac{r}{a}\right)^3 P_3 + \frac{11}{24}\left(\frac{r}{a}\right)^5 P_5 - \frac{25}{64}\left(\frac{r}{a}\right)^7 P_7 + ... \right\} \tag{44}$$

1.2.3. Ejemplo: potencial de una carga aislada

Otro método de encontrar los coeficientes de la expansión hace uso del hecho de que la expansión es única. Sí, por ejemplo, somos capaces de encontrar el potencial para $\theta = \theta_0$ fijo para todo r,

$$\Phi(\theta_0, r) = g(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\theta_0) \tag{45}$$

Entonces podemos inferir la forma de expansión expandiendo $g(r)$ En potencias de r Y reconociendo el coeficiente de r^l *debe* ser $P_l(\cos\theta_0)$ Multiplicado por el coeficiente A_l mientras el coeficiente de $(1/r)^{-(l+1)}$ debe ser $B_l P_l(\cos\theta_0)$. El valor mas conveniente de θ_0 es ciertamente 0 o π ya que conocemos $P_l(\cos\theta)$ en estos casos.

Consideramos El siguiente ejemplo específico: supongamos que hay una carga q En la posición $\vec{\mathbf{x}} = a\hat{\mathbf{z}}$
En cuyo caso sabemos que el potencial es

$$\Phi(r, \theta) = \frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}}. \tag{46}$$

Para $\theta = 0$, tenemos simplemente $\phi(\vec{\mathbf{x}}) = q/|r - a|$. En $r < a$ En particular esta función tiene una expansión en serie de potencias simple,

$$\Phi(r, 0) = \frac{q}{a - r} = \frac{q}{a}\frac{1}{1 - r/a} = \frac{q}{a}\left\{1 + \frac{r}{a} + \frac{r^2}{a^2} + \frac{r^3}{a^3} + ...\right\}. \quad r < a \tag{47}$$

De esta manera, asociando P_l con $(r/a)^l$, tenemos

$$\Phi(r, \theta) = \frac{q}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos\theta); \quad r < a \tag{48}$$

el punto es, la unicidad de la expansión en términos de polinomios de Legendre polynomials Nos dice que ésta debe ser la solución. Una expansión similar hecha para $r > a$ da

$$\Phi(r, \theta) = \frac{q}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^l P_l(\cos\theta) \quad r > a\,. \tag{49}$$

Haydos puntos que vale la pena remarcar en conexión con estas expansiones. Primero,como fue dicho antes, existe una función Generatriz $T(u, x)$ para los polinomios de Legendre; ver la Eq. (29). También, hemos obtenido una expansión conveniente y útil para cexpansiòn de una ccarga puntual; en notación general, hemos derivado

$$\frac{1}{|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\gamma) \tag{50}$$

donde γ es el angulo entre $\vec{\mathbf{x}}$ y $\vec{\mathbf{x}}'$ mientras $r_<$ $(r_>)$ es la menor (mayor) entre $|\vec{\mathbf{x}}|$ y $|\vec{\mathbf{x}}'|$.

1.3. Comportamiento de los campos en agujeros cónicos y cerca de puntas agudas

El campo en la vecindad de un vértice de una punta con forma de cóno o de una depresión También puede ser investigado usando el método de separación de variables en coordenadas esféricas. La solución para el potencial es de la forma, para r suficientemente pequeño

$$\Phi(r,\theta) \sim r^{\nu} P_{\nu}(\cos\theta) \tag{51}$$

donde $P_{\nu}(u)$ es una solución a la ecuación de legendre

$$\frac{d}{du}(1-u^2)\frac{dP_{\nu}}{du} + \nu(\nu+1)P_{\nu} = 0 \tag{52}$$

con ν a ser determinada.

Para la geometría mostrada, la solución debe comportarse correctamente cuando $\theta \to 0$, or $u = \cos\theta \to 1$, Pero no necesariamente cuando $\theta \to \pi$ o $u = -1$. Introduzcamos una variable $y \equiv \frac{1}{2}(1-u)$ o $u = 1-2y$; entonces Eq. (60) becomesse convierte en

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left(1-(1-2y)^2\right)\left(-\frac{1}{2}\frac{dP_{\nu}}{dy}\right) + \nu(\nu+1)P_{\nu} = 0 \tag{53}$$

o

$$\frac{d}{dy}\left(y(1-y)\frac{dP_{\nu}}{dy}\right) + \nu(\nu+1)P_{\nu} = 0. \tag{54}$$

Busquemos nuevamente una solución en forma de serie de potencias,

$$P_{\nu} = y^{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty} a_j y^j, \tag{55}$$

con $0 \le y \le y_0 \le 1$. Entonces

$$\frac{dP_{\nu}}{dy} = \sum_{j=0}^{\infty}(\alpha+j)a_j y^{\alpha+j-1}, \tag{56}$$

$$y(1-y)\frac{dP_{\nu}}{dy} = \sum_{j=0}^{\infty}(\alpha+j)a_j(y^{\alpha+j} - y^{\alpha+j+1}), \tag{57}$$

y

$$\frac{d}{dy}\left(y(1-y)\frac{dP_{\nu}}{dy}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\left[(\alpha+j)y^{\alpha+j-1} - (\alpha+j+1)y^{\alpha+j}\right](\alpha+j). \tag{58}$$

Ahora combinamos estas ecuaciones para encontrar

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left[a_j(\alpha+j)^2 y^{\alpha+j-1} + a_j\left((\alpha+j)(\alpha+j+1)+\nu(\nu+1)\right)y^{\alpha+j}\right] = 0 \tag{59}$$

o, aislando potencias individuales de y,

$$a_0\alpha^2 y^{\alpha-1} = 0 \tag{60}$$

Lo cual implica que $\alpha = 0$, y

$$a_{j+1} = a_j\frac{j(j+1)-\nu(\nu+1)}{(j+1)^2}. \tag{61}$$

Si uno hace $\nu = l$,Un entero no negativo , El resultado son justo los polinomios de Legendre , Como funciones de y. Más generalmente, para cualquier real $\nu > 0$, Una encuentra que las soluciones son *Funciones de Legendre de primer orden o clase* ν.

$$P_{\nu} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\nu) y^j, \tag{62}$$

Esta funciones se comportan correctamente (Es decir, no son singulares) para $y < 1$ correspondiente a $u > -1$ Y son singulares en $y = 1$.

Para $1 > \nu > 0$, $\nu(y)$ Tiene un solo cero; para $2 > \nu > 1$, $P_\nu(y)$ Tiene dos ceros, etc. Esto es importante porque sí tenemos un cono de semi apertura β Con superficies equipotenciales , necesitamos que ν sea tal que $P_\nu\left((1-\cos\beta)/2\right) = 0$.Habrá entonces una secuencia de valores permitidos de ν, que nombraremos como ν_k, $k = 1$, 2, 3,..., los cuales son tales que $y_\beta \equiv \frac{1}{2}(1-\cos\beta) \equiv k^{th}$ cero de P_ν.

La solución general para valores finitos de r, que incluyen el punto $r = 0$, es

$$\Phi(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^{\nu_k} P_{\nu_k}(\cos\theta). \tag{63}$$

para r pequeño, el primer término es aquel con la menor potencia de r, es decir el termino con $k = 1$. Por lo tanto podemos aproximar la suma suficientemente cerca del origen por su primer término

$$\Phi(r,\theta) \approx A r^{\nu_1} P_{\nu_1}(\cos\theta). \tag{64}$$

La contribución dominante del campo eléctrico en esta región viene de este termino; tenemos que usando $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{x}}) = -\nabla\Phi(\vec{\mathbf{x}})$,

$$E_r = \frac{d\Phi}{dr} = -\nu_1 A r^{\nu_1 - 1} P_{\nu_1}(\cos\theta) \tag{65}$$

y

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{d\Phi}{d\theta} = A\sin\theta\, r^{\nu_1 - 1}\, \frac{dP_{\nu_1}(u)}{du}\bigg|_{\cos\theta} \tag{66}$$

Para β menor que alrededor de $0{,}8\pi$, uno tiene [1] $\nu_1 \approx \frac{2{,}405}{\beta} - \frac{1}{2}$, mientras que β mayor que el mismo número, $\nu_1 \approx \left[2\ln\left(\frac{2}{\pi-\beta}\right)\right]^{-1}$. Como $\beta \to \pi$, $\nu_1 \to 0$ y entonces $E_r \sim E_\theta \sim 1/r$ en este límite. El aumento de un campo cerca de *e.g.,* Un pararrayos a lightning rod es pués $\sim (R/\delta)$ si R Es el tamaño del sistema y δ Es el radio de curvatura de la punta de la vara.Recordemos que en dos dimensiones encontramos un aumento del orden de $(R/\delta)^{1/2}$ El aumento es mucho más pronunciado en tres dimensiones; una punta tridimensional es mucho más afilada que una cuña.

1.4. Funciones asociadas de Legendre ; armónicos esféricos

Recordemos el caso más General de una solución a la ecuación de Laplace (i.e. un potencial) Que depende de el ángulo azimutal ϕ. Debemos incluir las funciones de ϕ $e^{im\phi}$, o, equivalentemente, $\sin m\phi$ y $\cos m\phi$, y la ecuación diferencial que debemos enfrentar en el espacio de θ es

$$\frac{d}{du}(1-u^2)\frac{dP}{du} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-u^2}\right)P = 0. \tag{67}$$

Las soluciones no son polinomios finitos en u En General pero pueden ser expresados en una serie de potencias infinita . Sólo se comportan correctamente en el intervalo $-1 \leq u \leq 1$ cuando $l \geq |m|$, con l entero. Entonces solo hay una función bien comportada la cual es conocida como *función asociada de Legendre de grado l and orden m.* para $m \geq 0$, la función asociada de Legendre puede ser escrita en términos del polinómio de Legendre del mismo grado:

$$P_l^m(u) = (-1)^m (1-u^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m}\left(P_l(u)\right); \tag{68}$$

[1] Esta relación viene de el estudio de las propiedades de las funciones de Legendre

se puede leer todo sobre esto en Abramowitz y Stegun paginas 332 to 353. haciendo uso de la Fórmula de Rodriguez para los polinomios de Legendre, vemos que

$$P_l^m(u) = (-1)^m \frac{(1-u^2)^{m/2}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{du^{l+m}}[(u^2-1)^l]. \tag{69}$$

Esta última fórmula también es valida para m negativos [2]; comparando los dos casos, podemos ver que

$$P_l^{-m}(u) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(u). \tag{70}$$

del mismo modo que con los polinomios de Legendre, hay una función generatriz para las funciones asociadas de Legendre, asi como también una variedad de relaciones de recurrencia. Por ejemplo, una relación de recurrencia en grado viene dada por

$$(2l+1)uP_l^m(u) = (l-m+1)P_{l+1}^m(u) + (l+m)P_{l-1}^m(u) \tag{71}$$

y una en orden es

$$P_l^{m+1} + \frac{2mu}{\sqrt{1-u^2}} P_l^m(u) + (l-m+1)(l+m)P_l^{m-1}(u) = 0 \tag{72}$$

De todo esto, lo que es realmente importante es que el producto

$$(Ar^l + Br^{-l-1})P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{73}$$

es una solución a la ecuación de Laplace y que una base de funciones $e^{im\phi}P_l^m(\cos\theta)$ con $l = 0, 1, 2, ...,$ y $m = -l, -l+1, ...l-1, l$ forma una base completa ortogonal en el dominio bidimensional $0 \leq \theta \leq \pi$ and $0 \leq \phi \leq 2\pi$. La completitud es dificil de demostrar, pero la ortogonalidad es bastante directa usando las formulas que ya hemos escrito. Consideremos la integral

$$I = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta e^{-im\phi} P_l^m(\cos\theta) e^{im'\phi} P_{l'}^{m'}(\cos\theta) = 2\pi\delta_{mm'} \int_{-1}^{1} du P_l^m(u) P_{l'}^m(u) \tag{74}$$

supongamos que $l' \geq l$, $m \geq 0$, y escribamos $P_{l'}^m$ en ttérminos de $P_{l'}^{-m}$:

$$\begin{aligned} I &= 2\pi\delta_{mm'}(-1)^m \frac{(l'+m)!}{(l'-m)!} \int_{-1}^{1} du P_{l'}^{-m}(u) P_l^m(u) \\ &= 2\pi\delta_{mm'}(-1)^m \frac{(l'+m)!}{(l-m)!} \frac{1}{2^{l+l'} l! l'!} \int_{-1}^{1} du \frac{d^{l'-m}}{du^{l'-m}}(u^2-1)^{l'} \frac{d^{l+m}}{du^{l+m}}(u^2-1)^l \\ &= 2\pi\delta_{mm'}(-1)^{l'} \frac{(l'+m)!}{(l'-m)!} \frac{1}{2^{l+l'} l! l'!} \int_{-1}^{1} du (u^2-1)^{l'} \frac{d^{l+l'}}{du^{l+l'}}(u^2-1)^l \\ &= 2\pi\delta_{ll'}\delta_{mm'} \frac{(l+m)!(2l)!(2l)!!}{(l-m)! 2^{2l}(l!)^2(2l+1)!!} 2 = \frac{4\pi}{2l+1}\delta_{ll'}\delta_{mm'} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}. \end{aligned} \tag{75}$$

Entonces podemos construir una base ortogonal de funciones en la superficie de la esfera unitaria; estas funciones se llaman *harmónicos esféricos* y se definen como

$$Y_{l,m}(\theta,\phi) \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \tag{76}$$

con $m = -l, -l+1, ..., l-1, m$ y $l = 0, 1, 2, ...$ estas funciones tienen la propiedad de que

$$Y_{l,m}^*(\theta,\phi) = (-1)^m Y_{l,-m}(\theta,\phi). \tag{77}$$

[2]Una cuestión de definición, en parte

La condición de ortogonalidad es

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta Y^*_{l,m}(\theta,\phi) Y_{l'm'},(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{78}$$

La relación de completitud (que no deduciremos) es

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m} Y^*_{l,m}(\theta',\phi') Y_{l,m}(\theta,\phi) = \delta(\phi-\phi')\delta(\cos\theta - \cos\theta'). \tag{79}$$

Una función arbitraria y general$g(\theta,\phi)$ se expande en términos de los armónicos esféricos como

$$g(\theta,\phi) = \sum_{l,m} A_{lm} Y_{l,m}(\theta,\phi) \tag{80}$$

con

$$A_{lm} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta g(\theta,\phi) Y^*_{l,m}(\theta,\phi). \tag{81}$$

1.5. Teorema de adición

En las aplicaciones ocacionalmenmte deberemos conocer la función $P_l(\cos\gamma)$ donde γ es el ángulo entre dos vectores $\vec{\mathbf{x}}$ and $\vec{\mathbf{x}}'$; Será muy útil ser capaces de escribir esta función en términos de las variables θ, ϕ, θ', and ϕ'. Logicamente, deberiamos poder hacerlo en términos de una base completa de funciones de estas variables como por ejemplo... los armónicos esféricos. de hecho la expansión es

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{l,m}(\theta',\phi') Y_{l,m}(\theta,\phi). \tag{82}$$

derivaremos esta expresión como un ejemplo del uso de los armónicos esféricos y sus propiedades. Primero armemos un segundo sistema de coordenadas rotado en relación al original de modo que su eje polar esté en la dirección de $\vec{\mathbf{x}}'$. en este sistema el vector $\vec{\mathbf{x}}$ tiene componentes (r_R, θ_R, ϕ_R).
Mas aún, $\theta_R = \gamma$. seguidamente podemos considerar a $P_l(\cos\gamma)$ como una función de θ y ϕ para θ' and ϕ' fijas y expandirla como

$$P_l(\cos\gamma) = \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l}^{l} A_{l'm'}(\theta',\phi') Y_{l'm'},(\theta,\phi). \tag{83}$$

Similarmente, en términos de armónicos esféricos cuyos argumentos son coordenadas en el sistema rotado, es facil ver que

$$P_l(\cos\gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{l,0}(\theta_R,\phi_R). \tag{84}$$

Ahora bien, los armónicos esféricos satisfacen la ecuación diferencial

$$\nabla^2 Y_{l,m}(\theta,\phi) + \frac{l(l+1)}{r^2} Y_{l,m}(\theta,\phi) = 0 \tag{85}$$

y tambien satisfacen esta ecuación con variables θ_R, ϕ_R. Pero el operador laplaciano $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ es un objeto escalar que es invariante ante rotaciones en las coordenadas lo que significa que lo podemos escribir en el sistema sin rotar mientras escribimos los armónicos esféricos en el sistema rotado:

$$\nabla^2 Y_{l,m}(\theta_R,\phi_R) + \frac{l(l+1)}{r^2} Y_{l,m}(\theta_R,\phi_R) = 0. \tag{86}$$

recordemos que

$$Y_{l,0}(\theta_R,\phi_R) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\gamma) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} A_{l'm'}(\theta',\phi') Y_{l'm',}(\theta,\phi). \tag{87}$$

Si introducimos esto en la ecuación diferencial obtenemos:

$$\sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} A_{l'm'}(\theta',\phi')[\nabla^2 Y_{l'm',}(\theta,\phi) + \frac{l(l+1)}{r^2} Y_{l'm',}(\theta,\phi)] = 0 \tag{88}$$

o

$$\sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} A_{l'm'}(\theta',\phi') \left[-\frac{l'(l'+1)}{r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] Y_{l'm',}(\theta,\phi) = 0. \tag{89}$$

esta ecuación solo puede ser verdadera si$l = l'$ **o** si $A_{l'm'} = 0$. De este modo hemos demostrado que $A_{l'm'} = 0$ para $l' \neq l$, y la expansión de P_l se reduce a

$$P_l(\cos\gamma) = \sum_{m=-l}^{l} A_{lm}(\theta',\phi') Y_{l,m}(\theta,\phi). \tag{90}$$

Los coeficientes de esta expansión se encuentran del modo habitual,

$$A_{lm} = \int d\Omega P_l(\cos\gamma) Y^*_{l,m}(\theta,\phi) = \int d\Omega_R P_l(\cos\theta_R) Y^*_{l,m}(\theta,\phi). \tag{91}$$

Siguiendo el mismo razonamiento, podemos expresar $\sqrt{4\pi/(2l+1)} Y^*_{l,m}(\theta,\phi)$ como una suma de la forma

$$\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y^*_{l,m}(\theta,\phi) = \sum_{m'=-l}^{l} B_{lm'}(m) Y_{lm'}(\theta_R,\phi_R) \tag{92}$$

donde B_{l0} es en particular

$$\begin{aligned} B_{l0}(m) &= \int d\Omega_R \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y^*_{l,m}(\theta,\phi) Y^*_{l,0}(\theta_R,\phi_R) \\ &= \int d\Omega_R Y^*_{l,m}(\theta,\phi) P_l(\cos\theta_R) \equiv A_{lm}. \end{aligned} \tag{93}$$

sin embargo de la Eq. (76), está claro que cuando $u = 1$ $P_l^m(u) = 0$ cuando $m \neq 0$, y $P_l^m(u) = P_l(u)$ cuando $m = 0$, de modo que

$$\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Y^*_{l,m}(\theta,\phi)\big|_{\theta_R=0} = B_{l0}(m) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(1) = B_{l0}(m) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}, \tag{94}$$

asi que

$$A_{lm} = B_{l0}(m) = \frac{4\pi}{2l+1}\, Y^*_{l,m}(\theta,\phi)\big|_{\theta_R=0} = Y^*_{l,m}(\theta',\phi') \frac{4\pi}{2l+1}, \tag{95}$$

donde el últmo paso se sigue de que $\theta_R = 0$, $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}'$. Asi que,

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{l,m}(\theta',\phi') Y_{l,m}(\theta,\phi). \tag{96}$$

Esto concluye la demostración del teorema de adición.

Una aplicación del teorema es que podemos escribir $\frac{1}{|\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{x}}'|}$ como una expansión en armónicos esféricos

$$\frac{1}{|\vec{\mathbf{x}}-\vec{\mathbf{x}}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\gamma) = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \sum_{m=-l}^{l} \left[Y^*_{l,m}(\theta',\phi') Y_{l,m}(\theta,\phi) \right] \right\}. \tag{97}$$

esta expansión será util cuando nos enfrentemos a integrales típicas de la electrostatica, tales como $\int d^3x' \rho(\vec{\mathbf{x}}')/|\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'|$.