

# Guía 3

---

Principios de Mecánica Estadística

**2019**



La temperatura es el  
aumento de la energía de un  
sistema cuando se añade un  
bit de entropía.

**Leonard Susskind**

La guerra de los agujeros negros. Ed. Crítica. 2015

	<b>Microcanónico</b> $\Omega(E, V, N)$	<b>Canónico</b> $Z(T, V, N)$	<b>Gran Canónico</b> $\mathbb{Z}(T, V, \mu)$
$\frac{S}{k}$	$\ln\Omega$	$\left(\frac{\partial(T\ln Z)}{\partial T}\right)_{V,N}$	$\left(\frac{\partial(T\ln\mathbb{Z})}{\partial T}\right)_{V,\mu}$
$F$	$E - kT\ln\Omega$	$-kT\ln Z$	$kT\mu^2 \left(\frac{\partial(\mu^{-1}\ln\mathbb{Z})}{\partial\mu}\right)_{T,V}$
$U$	$Cte (= E)$	$kT^2 \left(\frac{\partial(\ln Z)}{\partial T}\right)_{V,N}$	$-\left(\frac{\partial(\ln\mathbb{Z})}{\partial\beta}\right)_{\beta,\mu,V}$
$N$	$Cte$	$Cte$	$kT \left(\frac{\partial(\ln\mathbb{Z})}{\partial\mu}\right)_{T,V}$
$kT$	$\left(\frac{\partial(\ln\Omega)}{\partial E}\right)_{V,N}^{-1}$	$Cte$	$Cte$
$\frac{\mu}{kT}$	$-\left(\frac{\partial(\ln\Omega)}{\partial N}\right)_{E,V}$	$-\left(\frac{\partial(\ln Z)}{\partial N}\right)_{T,V}$	$Cte$
$P$	$kT \left(\frac{\partial(\ln\Omega)}{\partial V}\right)_{E,N}$	$kT \left(\frac{\partial(\ln Z)}{\partial V}\right)_{T,N}$	$\frac{kT}{V} \ln\mathbb{Z}$
$\frac{C_v}{k}$	$-\beta^2 \left(\frac{\partial^2(\ln\Omega)}{\partial E^2}\right)_{V,N}^{-1}$	$\beta^2 \left(\frac{\partial^2(\ln Z)}{\partial\beta^2}\right)_{V,N}$	$T \left(\frac{\partial^2(T\ln\mathbb{Z})}{\partial T^2}\right)_{V,\mu}$
$(\Delta N)^2$	0	0	$\left(\frac{\partial^2(\ln\mathbb{Z})}{\partial(\beta\mu)^2}\right)_{\beta,V}$
$(\Delta E)^2$	0	$\left(\frac{\partial^2(\ln Z)}{\partial\beta^2}\right)_{V,N}$	$\left(\frac{\partial^2(\ln\mathbb{Z})}{\partial\beta^2}\right)_{\beta,\mu,V}$

## Problema 3.1

Suponga un gas ideal de partículas clásicas, cuya energía expresamos

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}$$

Entendemos por gas ideal a un gas suficientemente diluido en el cual la energía de interacción entre moléculas es despreciable.

Utilizando la probabilidad de hallar al sistema en un estado particular de energía ( $E_r$ )

$$P_r = \exp[-\beta E_r]$$

Calcule el número medio de moléculas por unidad de volumen que tiene una velocidad entre  $\vec{v}$  y  $\vec{v} + d\vec{v}$

$$f(\vec{v})d^3v$$

Utilice el resultado anterior para obtener la distribución de velocidades, muestre que:

$$\begin{aligned}\bar{v}_x &= \bar{v}_y = \bar{v}_z = 0 \\ |\bar{v}| &= \sqrt{\frac{2kT}{m}} \\ |v|_{mp} &= \sqrt{2} |\bar{v}|\end{aligned}$$

- Exprese la validez de la aproximación clásica.
- Grafique la función distribución de velocidades para diferentes valores de temperatura.
- ¿Puede un gas ideal condensar,? justifique su respuesta .

## Problema 3.2

Consideremos un gas suficientemente diluido de  $N$  moléculas idénticas de masa  $m$  confinadas en una caja de lados  $L_x, L_y, L_z$ .

- Calcule la probabilidad de hallar las moléculas en cualquiera de sus estados cuánticos.
- Calcule la energía de cada estado cuántico  $\epsilon_r$ , en función de los números cuánticos  $n_x, n_y, n_z$ .
- Calcule la energía media a partir de la expresión

$$\bar{\epsilon} = \sum_r P_r \epsilon_r$$

Demuestre que la expresión anterior es equivalente a la expresión

$$\bar{\epsilon} = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta}$$

Donde  $Z = \sum_r \exp[-\beta \epsilon_r]$ , recibe el nombre de función partición.

- Encuentre la función partición y calcule la energía media. Ayuda, la sumatoria puede reemplazarse por una integral, ¿Por qué?.

### Problema 3.3

Utilizando la expresión

$$\bar{\varepsilon} = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta}$$

- Obtenga una expresión de  $\overline{\varepsilon^2}$  en términos de la derivada de  $\ln(Z)$ .
- Calcule la dispersión de la energía  $\overline{(\Delta\varepsilon)^2} = \overline{\varepsilon^2} - \bar{\varepsilon}^2$
- Calcule la desviación estándar  $\widetilde{\Delta\varepsilon} = (\overline{(\Delta\varepsilon)^2})^{1/2}$
- Use los resultados anteriores para obtener la siguiente expresión para un gas ideal

$$\frac{\widetilde{\Delta\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}}$$

Interprete el significado del resultado anterior.

### Problema 3.4

Considerando un gas ideal constituido por  $N$  moléculas monoatómicas, y utilizando las propiedades de la función exponencial, demuestre que la función partición completa del gas puede escribirse como

$$Z = Z_0^N$$

Con  $Z_0$  la función partición de una molécula.

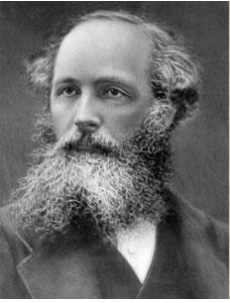
### Problema 3.5

Considere un recipiente lleno con gas nitrógeno ( $N_2$ ), a temperatura ambiente ( $T = 3000k$ ), calcule la velocidad media de las moléculas del gas y la fracción de moléculas con una velocidad  $>200\%$  de la velocidad media.

### Problema 3.6

La energía promedio en un átomo de hidrógeno en la atmósfera estelar ( la cual asumimos en equilibrio térmico) es de 1.0eV.

- Calcule la temperatura.
- Calcule la razón  $N_3/N_1$ , siendo  $N_1$  el número de moléculas en el estado fundamental y  $N_3$ , el número de moléculas en el segundo estado excitado.
- Calcule el número de átomos ionizados y compárelos con el número de átomos en el segundo nivel excitado.
- En base a las consideraciones anteriores describa brevemente la atmosfera estelar.



# Piense como Maxwell

**N**acido en Edimburgo el 13 de junio de 1831 James Maxwell es uno de los grandes físicos del siglo XIX. Hombre tímido, muy religioso y de un agudo sentido del humor, huérfano de madre desde los nueve años, estudió en la Edinburgh Academy, donde recibió el apodo de "Dafty" (diminutivo de 'chiflado'), a causa de su acento campesino, su vestimenta poco elegante y su peculiar sentido del humor. A los quince años ya había inventado el método que consistía en trazar una elipse con la única ayuda de un cordel y unos alfileres. En 1847 ingresó en la Universidad de Edimburgo, y en 1850 lo hizo en el Trinity College de Cambridge, donde fue el segundo de su promoción y recibió el Premio Smith en 1854.

En 1856, se incorporó como profesor en el Mariscal College de Aberdeen, ciudad en la que contrajo matrimonio con la hija del rector de la Universidad, y con la que llevó a cabo experimentos sobre la viscosidad de los gases. En 1860 se trasladó al King's College de Londres, donde permaneció hasta 1865, fecha en la que murió su padre y decidió volver a su ciudad natal en calidad de investigador. No obstante, fue convencido para que aceptara la cátedra Cavendish de Física Experimental en Cambridge, donde abrió su laboratorio en 1874, el cual se convirtió en una de las instituciones más importantes en cuanto a la formación de científicos. Contrajo cáncer en 1879, enfermedad a causa de la que falleció el 5 de noviembre del mismo año, en Cambridge.

La vasta labor científica de este autor abarca diversos campos.

En termodinámica y teoría cinética de los gases, completó el modelo ya existente de un gas formado por moléculas en continuo movimiento que chocan entre sí y con las paredes del recipiente que lo contiene. Maxwell publicó en 1865 su primer trabajo en este campo, que introdujo una forma de razonamiento matemático en la concepción de los gases. Demostró que la distribución de las velocidades de las moléculas que forman un gas dependía de la temperatura y concluyó que el calor se almacena en el movimiento de las moléculas gaseosas. Esta teoría empezó a aplicarse a fenómenos de difusión, viscosidad y conductividad térmica de los gases. La distribución de velocidades se conoce hoy en día como la distribución de Maxwell-Boltzmann en honor a James Maxwell y a Ludwig Boltzmann quien formulara de manera independiente una teoría similar en 1872.

Deduciremos a continuación la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann para un gas clásico de partículas idénticas en equilibrio a una temperatura  $T$ , utilizando las consideraciones fundamentales utilizadas por Maxwell para obtener dicha distribución. La probabilidad  $P(\mathbf{v})d\mathbf{v}$  de encontrar una molécula en el rango  $\mathbf{v} - \mathbf{v} + d\mathbf{v}$  se obtiene utilizando dos premisas fundamentales:

- Simetría rotacional en el espacio de velocidades. Es decir, la distribución debe ser isotrópica, y depender solo de la magnitud de la velocidad  $v = |\mathbf{v}|$  y no de la dirección.
- No debe existir correlación entre las diferentes componentes de la velocidad.

Las consideraciones anteriores las podemos expresar como:

$$P(\mathbf{v}) = P(v^2)$$

$$P(v^2) = p(v_x^2)p(v_y^2)p(v_z^2)$$

Donde  $p(v_i^2)dv_i$  es la probabilidad de tener la componente  $i$  de la velocidad en el rango  $v_i - v_i + dv_i$ .

Usando las consideraciones anteriores Maxwell deduce la distribución de velocidades usando un truco muy inteligente, es decir aplicando el logaritmo a la ecuación anterior

$$\ln[P(v^2)] = \ln[p(v_x^2)] + \ln[p(v_y^2)] + \ln[p(v_z^2)]$$

Y diferenciando con respecto a las componentes de la velocidad. Esto es:

$$\frac{\partial \ln[P(v^2)]}{\partial v_i^2} = \frac{d \ln P}{d v^2} \frac{\partial v^2}{\partial v_i^2} = \frac{d \ln P}{d v^2} = \frac{d \ln p(v_i^2)}{d v_i^2}$$

y dado que esta ecuación es válida para todos los componentes, llegamos a la conclusión de que el lado derecho debe ser constante. Entonces

$$\frac{d \ln P}{d v^2} = -b$$

Por lo tanto

$$P = A e^{-b v^2}$$

Las constantes son determinadas por las condiciones de normalización

$$\int P(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = n$$

Donde  $n$  es la densidad de partículas y por la definición de temperatura

$$\frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2} T$$

Obtenemos

$$P(\mathbf{v}) = n \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} e^{-m v^2 / 2T}$$

Note que no se necesita información del potencial entre partículas. Sólo necesitamos un mecanismo de interacción que conserve la masa, la cantidad de movimiento y energía en cada colisión, por lo que en realidad existe un estado de equilibrio.

# Temperaturas absolutas negativas



Consideremos un sistema de 2 niveles de energía  $\pm\epsilon$ . Para un total de  $N$  partículas, identificamos con  $N_+$  las partículas presentes en el nivel superior de energía  $(+\epsilon)$  y con  $N_-$  las del nivel inferior  $-\epsilon$ . Tenemos por lo tanto:

$$N = N_- + N_+$$

$$E = (N_+ - N_-)\epsilon$$

Usando las ecuaciones anteriores, podemos expresar:

$$N_+ = \frac{1}{2} \left( N + \frac{E}{\epsilon} \right)$$

$$N_- = \frac{1}{2} \left( N - \frac{E}{\epsilon} \right)$$

El número de microestados es:

$$\Omega(E, N) = \frac{N!}{N_+! N_-!} = \frac{N!}{\left[ \frac{1}{2} \left( N + \frac{E}{\epsilon} \right) \right]! \left[ \frac{1}{2} \left( N - \frac{E}{\epsilon} \right) \right]!}$$

Podemos calcular la entropía, y obtenemos:

$$S(E, N) = kN \ln(N) - k \frac{1}{2} \left( N + \frac{E}{\epsilon} \right) \ln \left[ \frac{1}{2} \left( N + \frac{E}{\epsilon} \right) \right] - \frac{1}{2} \left( N - \frac{E}{\epsilon} \right) \ln \left[ \frac{1}{2} \left( N - \frac{E}{\epsilon} \right) \right]$$

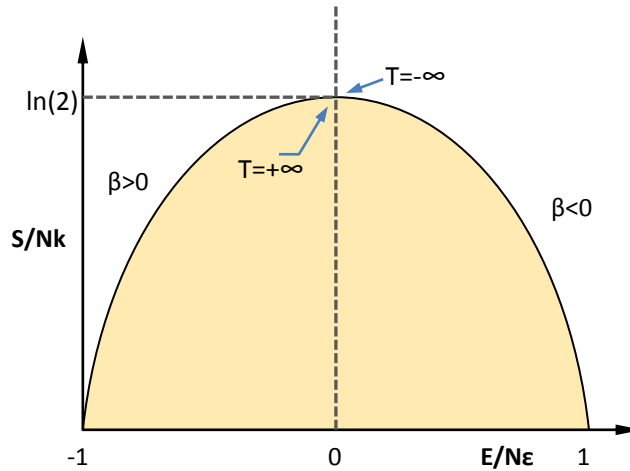
¿qué aproximación hemos realizado para obtener el resultado anterior?, la temperatura del sistema resulta:

$$\frac{1}{T} = \left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_N = \frac{k}{2\epsilon} \ln \left\{ \frac{N - E/\epsilon}{N + E/\epsilon} \right\}$$

Se deja como ejercicio obtener las expresiones de  $N_+(T)$  y  $N_-(T)$ , y mostrar que  $N_- = N T \rightarrow 0$  y  $N_+ = N_- = N/2 T \rightarrow \infty$ . Hasta acá nada interesante, ahora, analicemos que sucede cuando  $N_+ > N_-$  ¿qué temperatura tiene el sistema?, ¿hay que llevar abrigo?

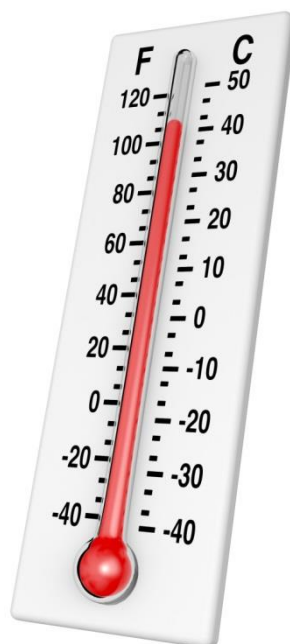
Para analizar mejor la situación grafiquemos la entropía en función de la energía, en este gráfico, la pendiente corresponde a la inversa de la temperatura.





Si partimos desde una temperatura igual a cero, y comenzamos a elevar la temperatura, observamos que el sistema pasa de tener el nivel inferior completamente ocupado  $N_- = N$ , a un valor de  $N_- = N/2$  cuando la temperatura tiende a infinito. Ahora, imaginemos que por un mecanismo especial, forzamos al sistema a sobre-ocupar el nivel superior, en un láser este hecho se conoce como bombeo, y se realiza con un haz de luz. Un estado con  $N_+ > N_-$  se llama inversión. Como sabemos en un sistema termodinámico, la energía fluye desde la fuente caliente a la fuente fría, o de manera equivalente, desde una configuración de menor entropía a una configuración de mayor entropía. Si observamos el sistema estudiado notaremos que las configuraciones con temperatura negativa presentan una entropía menor que la condición  $N_- = N/2$ , por lo tanto una configuración de temperatura negativa se comporta como una fuente caliente!!!, en los láseres, este fenómeno se conoce como emisión.

Para más información consultar: Thermodynamics and Statistical Mechanics at Negative Absolute Temperatures, Norman F. Ramsey, Phys. Rev. **103** (1956).



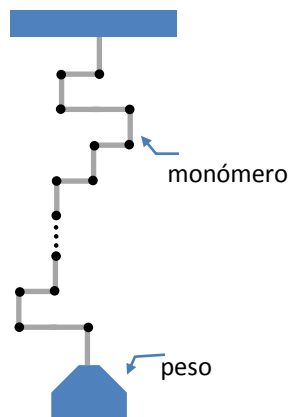
## Problema 3.7

Calcule utilizando un enfoque microcanónico, la ecuación de estado de un gas ideal.

## Problema 3.8

Obtener la ecuación de estado de una banda elástica, es decir, cómo varía la longitud de la misma en función de la tensión aplicada y la temperatura. Para eso considere a la banda elástica como un “manejo” de polímeros y cada uno de ellos como una larga cadena de monómeros, bajo la acción de una fuerza, ver figura.

Calcule el número de microestados, la entropía y el módulo elástico de la banda elástica. ¿Cómo varía el módulo elástico con la temperatura?, ¿por qué?



## Problema 3.9

Considere una cadena unidimensional de  $N \gg 1$  sitios localizados. Cada sitio contiene un polímero con 2 estados posible de energía. Una configuración sin deformar  $h = 0$ , o una configuración deformada independiente de la dirección de flexión  $h = \varepsilon > 0$ , ver gráfico.

- Describa la expresión para el número de microestados de un sistema de 2 niveles con degeneración  $g_1$  y  $g_2$  respectivamente.
- Aplique el resultado anterior y determine las expresiones de la entropía  $S$ , la energía interna  $E$  y el calor específico  $C_v$  de la cadena de polímeros.
- Obtenga las expresiones de  $E$  y  $C_v$  en los límites de altas y bajas temperaturas.
- Obtenga el número de cadenas flexionadas y sin flexionar en los límites  $T \rightarrow 0$  y  $T \rightarrow \infty$ , grafique.
- ¿A qué temperatura corresponde la configuración mostrada?
- De acuerdo con las expresiones antes derivadas, encuentre el dominio donde el sistema presenta temperaturas negativas, ¿qué significa? Grafique el sistema con una configuración  $T < 0$
- Muestre que el sistema con se comporta como una fuente caliente. Explique



### Problema 3.10

Considere un sistema formado por dos dados. Deermine el número de microestados y el estado macroscópico más probable. Desarrolle para este sistema el concepto de temperatura.

### Problema 3.11

Considere un sistema de 2 átomos cada uno con tres estados cuánticos  $0, e, 2e$ , el sistema está en contacto con un reservorio térmico a temperatura  $T$ . Calcule la función partición si las moléculas son distinguibles o indistinguibles.

### Problema 3.12

Considere una molécula diatómica con momento de inercia  $I$ . En este problema solo consideraremos la energía de rotación.

- Utilice la expresión clásica y calcule la función partición y la energía media de rotación.

$$E = \frac{1}{2I} \left( p_\theta^2 + \frac{1}{\text{sen}^2(\theta)} p_\phi^2 \right)$$

- Utilice la expresión cuántica de un rotor rígido

$$E = \frac{\hbar^2}{2I} j(j+1) \quad j = 0,1,2$$

Con degeneración  $(2j+1)$ .

- Compare ambos resultados.

### Problema 3.13

Un oscilador unidimensional cuántico se encuentra en equilibrio térmico a una temperatura  $T$ .

- Calcule la función partición.
- Calcule la dependencia de la energía media con la temperatura.
- Obtenga las expresiones para  $kT \gg \hbar\omega$  y  $kT \ll \hbar\omega$ . Compare los resultados con los obtenidos para un oscilador clásico.

### Problema 3.14

---

Calcule la altura respecto del nivel del mar donde la densidad del aire es la mitad que a nivel del mar.

### Problema 3.15

---

Un gas monoatómico contiene átomos con 2 niveles de energía, un estado fundamental con degeneración  $g_1$  y un estado excitado con degeneración  $g_2$ . Calcule la función partición y la energía promedio del sistema.

### Problema 3.16

---

Sea un conjunto de  $N$  osciladores armónicos cuánticos tridimensionales de frecuencia  $\omega$  y energía  $E$ , calcule la entropía  $S$  y la temperatura  $T$ .

# Distribución vertical de partículas brownianas

Se establece el equilibrio de sedimentación cuando una suspensión permanece en reposo durante un tiempo prolongado. Las fuerzas que determinan la distribución vertical de las partículas son:

- La fuerza gravitatoria  $mg$  que actúa sobre las partículas, la cual tiende a depositar las partículas en el fondo del recipiente.
- La fuerza generada por la colisión de las moléculas del fluido con las partículas, la cual tiende a distribuir las uniformemente por todo el fluido.

Para determinar la distribución vertical consideremos una columna vertical de partículas de gas a temperatura  $T$  en equilibrio y consideremos las fuerzas que actúan sobre una sección horizontal de espesor  $dh$ , como se ilustra en la siguiente figura.

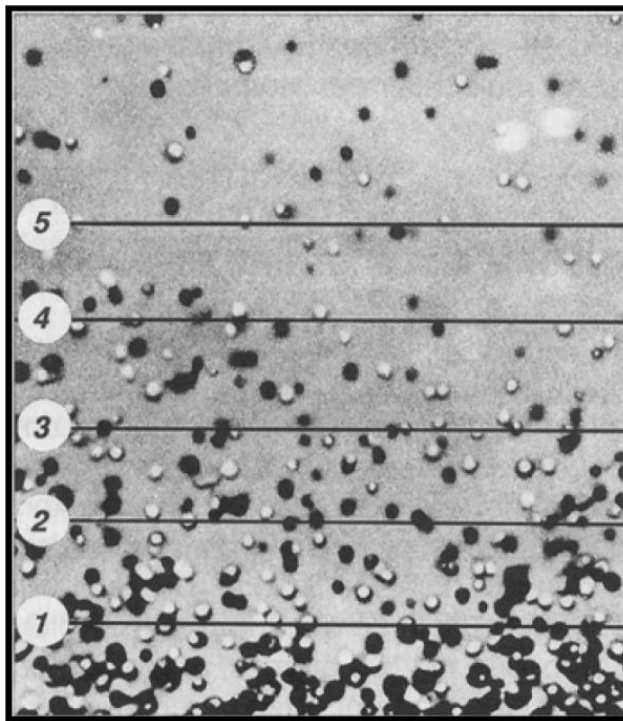


Figura: Imagen extraída del trabajo de Perrin. Corresponde a la distribución de partículas de gutagamba (diámetro aproximado  $0.29\mu\text{m}$ ) en suspensión. Note las diferencias en densidad a diferentes alturas.

La fuerza que actúa hacia abajo es su peso

$$dw = A n m g dh$$

Donde  $A$  es el área,  $n$  es el número de partículas por unidad de volumen a la altura  $h$ ,  $m$  es la masa de una partícula y  $g$  la constante gravitatoria. La fuerza que actúa hacia arriba se debe a la diferencia de presión entre la superficie superior e inferior en la sección horizontal considerada.

$$df = Adp$$

Donde  $A$  es el área,  $n$  es el número de partículas por unidad de volumen a la altura  $h$ ,  $m$  es la masa de una partícula y  $g$  la constante gravitatoria. La fuerza que actúa hacia arriba se debe a la diferencia de presión entre la superficie superior e inferior en la sección horizontal considerada.

$$df = Adp$$

Considerando que el sistema está en equilibrio,

$$Adp = -Anmgdh$$

el signo negativo se debe a que  $\frac{dP}{dh}$  es negativo. Usando la ley de los gases ideales y la constante de Boltzmann  $k_B = R/N_A$ , podemos expresar

$$PV = RT = N_A kT$$

donde  $R$  es la constante universal de los gases y  $N_A$ , el número de Avogadro. De manera equivalente

$$p = \frac{N_A kT}{V} = nkT$$

donde  $n$ , como antes, es el número de partículas por unidad de volumen. Por lo tanto, para un cambio isotérmico

$$dp = kTdn$$

Combinando las ecuaciones anteriores podemos expresar

$$\frac{dn}{n} = \frac{-mg}{kT} dh$$

Ahora integramos entre  $h = 0$  y  $h$  donde las densidades de partículas son  $n_0$  y  $n$  respectivamente.

$$\int_{n_0}^n \frac{dn}{n} = \frac{-mg}{kT} \int_0^h dh$$

$$\ln(n) - \ln(n_0) = -\frac{mg}{kT} h$$

Obtenemos

$$n = n_0 \exp\left[-\frac{mg}{kT} h\right]$$

La expresión anterior representa la variación del número de partículas por unidad de volumen en función de la altura. Esta ecuación se puede aplicar a partículas brownianas de tamaño uniforme si el peso ( $mg$ ) es reemplazado por el peso efectivo de una partícula en un fluido teniendo en cuenta la flotabilidad. Suponiendo que las partículas son esféricas con un radio  $a$ , el peso efectivo resulta:

$$w_{efec} = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho g - \frac{4}{3} \pi a^3 \rho' g$$

$$w_{efec} = \frac{4}{3} \pi a^3 g (\rho - \rho')$$

donde  $\rho, \rho'$  son las densidades del material de las partículas y el fluido, respectivamente. Finalmente podemos expresar

$$n = n_0 \exp\left[\frac{-4\pi a^3 g(\rho - \rho') N_0 h}{3RT}\right]$$

Jean Perrin llevó a cabo entre los años 1900 y 1912 una serie de experimentos con coloides en los cuales utilizando la ecuación anterior y midiendo la densidad de partículas de gutagamba (diámetro aproximado  $0.29\mu m$ ) en suspensión determinó el valor para el número de Avogadro. Fue galardonado con el Premio Nobel en el año 1926 por este trabajo.

**Bibliografía:**

Brownian motion and molecular size. K.L. Planken 2003.

**E**n la teoría de la información, la entropía es una medida de la incertidumbre asociada a una variable aleatoria. En este contexto es común referirse a la entropía como la entropía de Shannon, que cuantifica el valor esperado de información contenido en un mensaje. La fórmula de la entropía es introducida por Claude Shannon en 1948 en su trabajo «A mathematical Theory of Communication». Sea una variable aleatoria  $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ , donde cada valor tiene asociada una probabilidad  $p(x)$ , entonces:

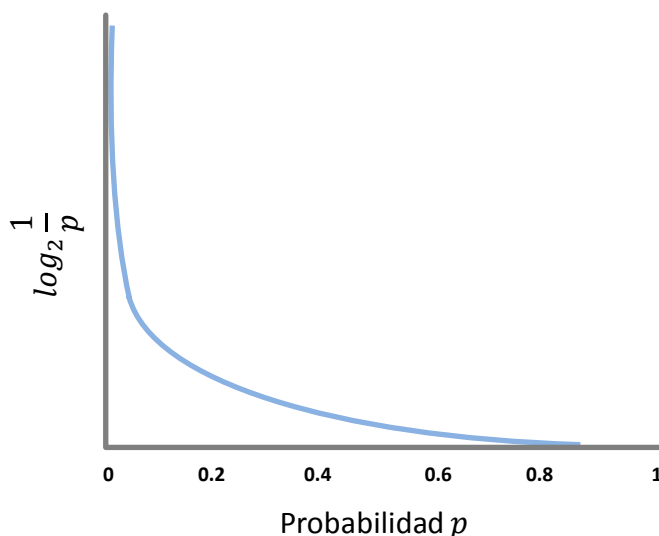
$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \log_2 p(x_i)$$

El signo menos es utilizado porque la probabilidad adquiere valores entre 0 y 1, por lo tanto el logaritmo toma valores negativos en el dominio de la probabilidad.

Es usual utilizar la expresión:

$$H(X) = \sum_{i=1}^n p(x_i) \log_2 \frac{1}{p(x_i)}$$

donde el término  $\log_2 \frac{1}{p(x_i)}$  se denomina «sorpresa», la misma decrece de manera monótona cuando la probabilidad se incrementa, ver figura.

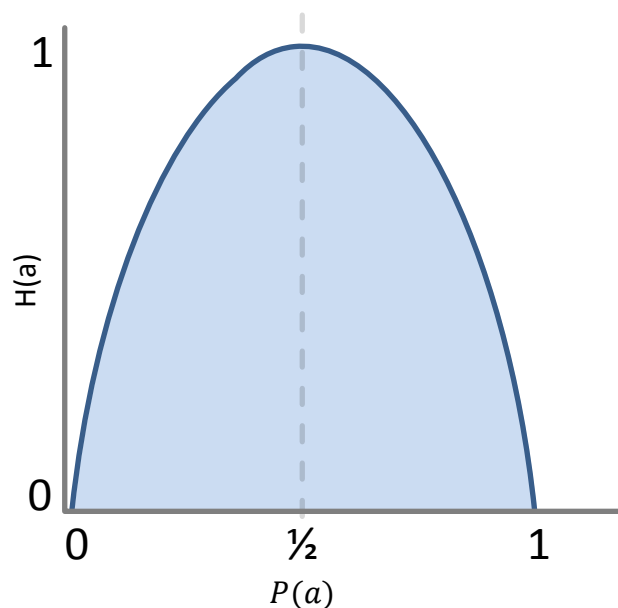




La entropía se mide en bits. Imaginemos un experimento donde tenemos dos posible resultados, sale  $a$  o sale  $b$ , cada uno con su respectiva probabilidad,  $p(a)$ ,  $p(b)$ , la entropía resulta:

$$H(X = a) = -p(a)\log_2 p(a) - (1 - p(a))\log_2(1 - p(a))$$

La entropía para diferentes valores de  $p(a)$  se ilustra en la figura, nótese que la entropía es máxima  $H = 1 \text{ bit}$  cuando  $p(a) = 1/2$ .



Podemos definir el bit como el valor de la entropía asociada a un experimento aleatorio con dos posibles resultados ambos con  $p(a) = p(b) = 1/2$  como por ejemplo lanzar una moneda.

$$H = -\frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2 \frac{1}{2} = 1 \text{ bit}$$

### Ejemplo:

Calcule la entropía de un conjunto de 8 letras  $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ , ¿cuál es la cantidad mínima de bits que se necesitan para representar al conjunto?

*Solución:*

Utilizando la entropía de Shannon y considerando igualmente probables a todas las letras, podemos expresar:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^8 \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} = 3$$

Es decir se necesitan 3 bits de información para representar el conjunto de 8 letras.

Si las probabilidades de todas las variables son iguales, la expresión de la entropía se reduce a:

$$H(X) = -\log_2 p$$

Observese el parecido con la expresión de Boltzmann de la entropía, sin embargo no puede establecerse una relación directa entre ambas, más allá de su nombre, de hecho se cuenta la historia de que fue von Neumann quien le sugirió *«llámala entropía pues nadie sabe lo que es realmente por lo que siempre tendrás ventaja en cualquier discusión»*.

Para obtener el equivalente termodinámico de la información, resulta fundamental mencionar el trabajo de Landauer. La teoría de Landauer formula dos premisas:

**1-** La información en un sistema físico está siempre codificada.

**2-** La destrucción de un bit causa la transferencia de  $k_B T \ln(2)$  [J] al ambiente, o de manera equivalente un cambio de entropía  $\Delta S = Q/T = k_B \ln(2)$  [J/K].

Por ejemplo, si para quemar una sustancia se consumen  $M$  Joules, la cantidad de bits  $N$  que se destruyen (información que se pierde) será,  $N = \frac{M}{k_B T \ln(2)}$ .

**Referencias:** Shannon, Claude Elwood (1948). «A mathematical theory of communication». Bell System Technical Journal 27 (379-423 and 623-656).

Antoine Bérut; Artak Arakelyan; Artyom Petrosyan; Sergio Ciliberto; Raoul Dillenschneider; Eric Lutz (2012). «Experimental verification of Landauer's principle linking information and thermodynamics». Nature, 483 (7388).



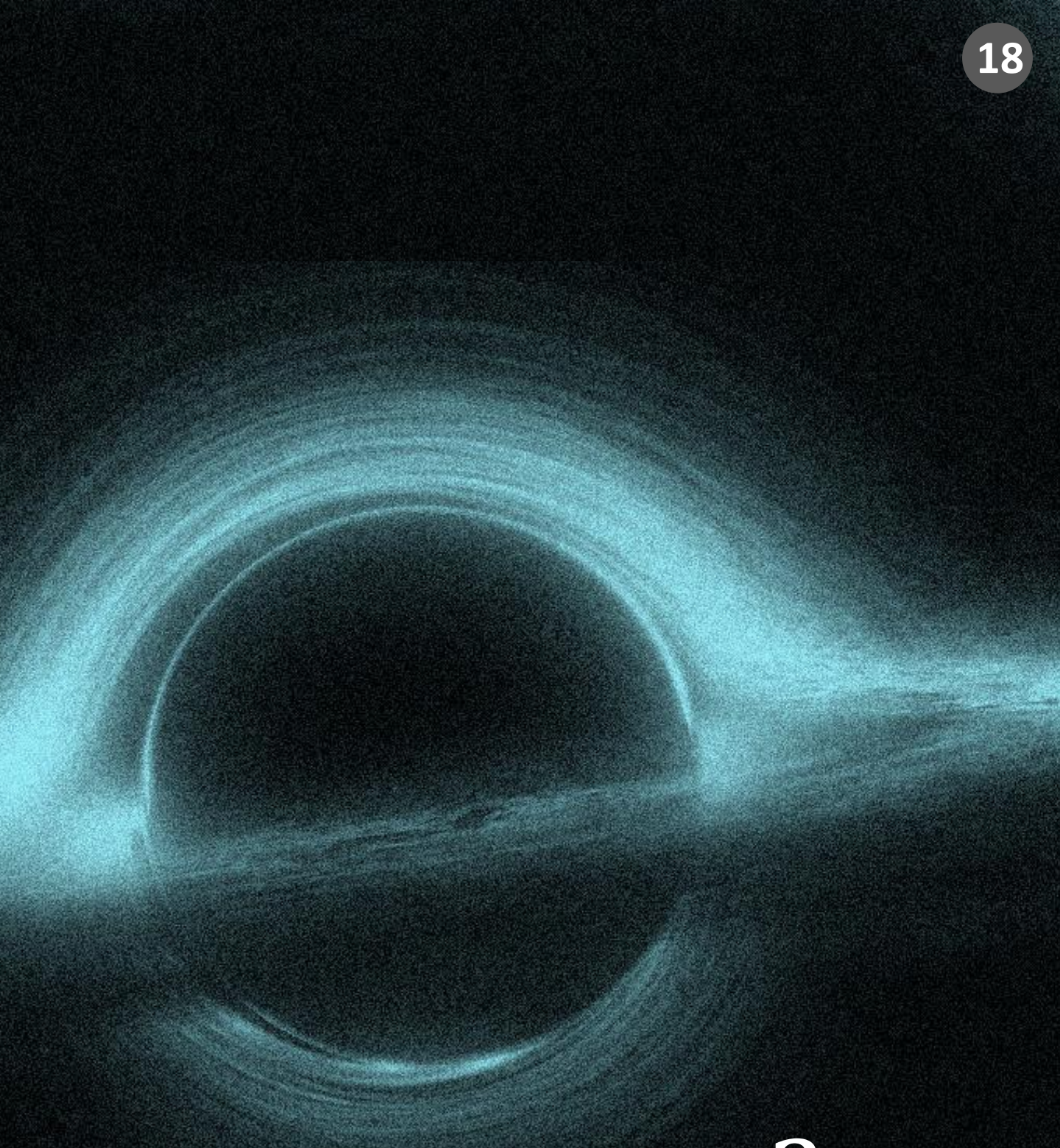
# Cómo ganar en el casino

**C**laude Shannon tal vez sea la única persona del siglo XX que pueda vanagloriarse de haber fundado toda una nueva ciencia.

El campo que inventó, la teoría de la información, es en esencia, la matemática subyacente a la revolución digital. Apuntala la ciencia informática, las telecomunicaciones modernas, la criptografía y el descifrado de códigos. Su objeto básico de estudios son los datos: los *bits* (término acuñado por Shannon) de información. El estudio de aspectos tales como el movimiento de las ondas de luz a través del aire o cómo funcionan los lenguajes humanos es muy antiguo; la propuesta revolucionaria de Shannon fue estudiar la información en sí, es decir, aquello que transportan las ondas de luz desde los objetos físicos hasta la retina o lo que se transfiere entre dos personas cuando hablan, independientemente de las ondas o de las palabras. Es casi imposible sobredimensionar la importancia que cobraría esta idea. Pero Shannon tenía otros intereses, entre ellos ganar plata en el casino, o solo divertirse combinando dos de sus grandes pasiones, la teoría de juego y las máquinas.

Un estudiante de posgrado llamado John Thorp colaboró con Shannon para diseñar una estrategia con la cual ganar a la ruleta. Estamos en el verano de 1961 cuando Thorp y Shannon viajaron a las Vegas a probar suerte. La idea se centraba en el uso de un sistema de intercomunicadores y un rudimentario ordenador. Uno de ellos permanecería cerca de la ruleta observando atentamente, mientras portaba una serie de interruptores en los zapatos de modo de comunicar cuando la bola comenzaba a girar y cuando daba la primera vuelta. Una segunda persona portaría el ordenador, el cual se cargaba con los datos de la bola de la ruleta. Si bien era imposible predecir el número ganador, el ordenador podía predecir en que octante podía caer finalmente la bola. Durante varias noches, la estrategia funcionó y lograron ganar algo de dinero. Sin embargo, no compensaba la tensión vivida durante el viaje. El juego ya genera suficiente estrés sin afrontar el riesgo de que fornidos guardas de seguridad se abatan sobre nosotros, por lo cual Shannon y Thorp dejaron las Vegas y las apuestas, dejaron el campo de las ciencias aplicadas para continuar con su trabajo en ciencias básicas.

Extraído y adaptado de "Cuando los físicos asaltaron los mercados" de J. Weatherall.  
Ed. Ariel (2013).


$$S = \frac{1}{4} \frac{k_B c^3}{G \hbar} A$$

¿Qué sucede si lanzamos una taza de té caliente en un agujero negro? La pregunta puede parecer absurda pero nos lleva a un entendimiento profundo de la relación entre la entropía y la información.

Analicemos un poco más la cuestión. Una taza de té caliente tiene una cierta cantidad de entropía, si la arrojamos a un agujero negro nada puede escapar, por lo tanto la entropía se pierde. Por lo tanto ¿sería posible reducir la entropía del universo?, ahora nos damos cuenta que la pregunta es profunda y su respuesta requiere revisar los conceptos fundamentales de la física. Según se cuenta, fue John Wheeler quién formuló esta pregunta a su becario Jacob Bekenstein. Meses después Bekenstein regresó con la respuesta «no destruyes la entropía, el agujero negro tiene su propia entropía, todo lo que haces es aumentarla».

En 1973 Bekenstein se propuso calcular el aumento de entropía de un agujero negro a partir de la suposición de que tenía que aumentar en, al menos la entropía entrante.

Para ello se sirvió de un experimento mental. Recordemos que la entropía nos dice cuántos bits de información necesitamos para especificar el estado de un cuerpo. La mínima cantidad de entropía que podemos añadir a algo es exactamente un bit: o sí o no.

## ¿Cómo añadir un bit de información a un agujero negro?

Podríamos por ejemplo, arrojar una moneda a su interior. La moneda puede caer en cara o en cruz: dos posibilidades, por lo tanto un bit. Por desgracia, la información contenida en una moneda es mucho mayor, incluye la posición y velocidad de cada una de sus partículas.

Necesitamos algo más pequeño.

Otra posibilidad es lanzar un átomo, pero nos vemos con el mismo problema, el átomo está constituido por protones neutrones y electrones.

Añadir un átomo a un agujero negro aumentará su entropía en mucho más de un bit. Parece ser que la única opción es usar una partícula elemental, algo que no pueda ser dividido en partes constituyentes.

Por lo tanto usaremos un fotón de frecuencia  $f$ , con una longitud de onda  $\lambda$  similar al radio  $R$  (radio de Schwarzschild) del horizonte de eventos del agujero negro.

$$f = \frac{c}{\lambda} \propto \frac{c}{R}$$

La energía del fotón resulta:

$$E = hf \propto \frac{hc}{R}$$

Usando la equivalencia de Einstein entre la masa y energía, podemos obtener la masa que gana el agujero por el fotón que arrojamos.

$$m = \frac{E}{c^2} \propto \frac{hc}{Rc^2} = \frac{h}{Rc}$$

ahora que conocemos la masa de un bit de entropía, solo queda contar cuántos bits tiene el agujero negro. Para ello, usaremos la fórmula que relaciona la masa  $M$  del agujero con su radio:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

de la cual podemos despejar la masa y obtener:

$$M = \frac{Rc^2}{2G}$$

para encontrar cuántos bits de información caben en el agujero negro, solo hay que dividir la masa del agujero por la masa que el agujero gana con un bit:

$$N = \frac{M}{m} \propto \frac{\frac{Rc^2}{2G}}{\frac{h}{Rc}} = \frac{R^2 c^3}{2Gh}$$

pero el área de una esfera es  $A = \frac{4}{3}\pi R^2$ , de forma que podemos expresar el número de bits como:

$$N \propto \frac{c^3}{8\pi Gh} A$$

Es decir el número de bits almacenados en el agujero negro es proporcional al área de su horizonte de sucesos. Dado que el número de bits es proporcional a la entropía, hemos descubierto que la entropía es proporcional al área. La fórmula final, es el gran logro científico alcanzado por Stephen Hawking, y es la fórmula que eligió para su epitafio:

$$S = \frac{1}{4} \frac{k_B c^3}{G \hbar} A$$

**Referencias:** La guerra de los agujeros negros. Leonard Susskind. Ed. Crítica. 2015.

$$S = \frac{1}{4} \frac{k_B c^3}{G \hbar} A$$

Mecánica Estadística

Relatividad

Geometría

Gravedad

Cuántica