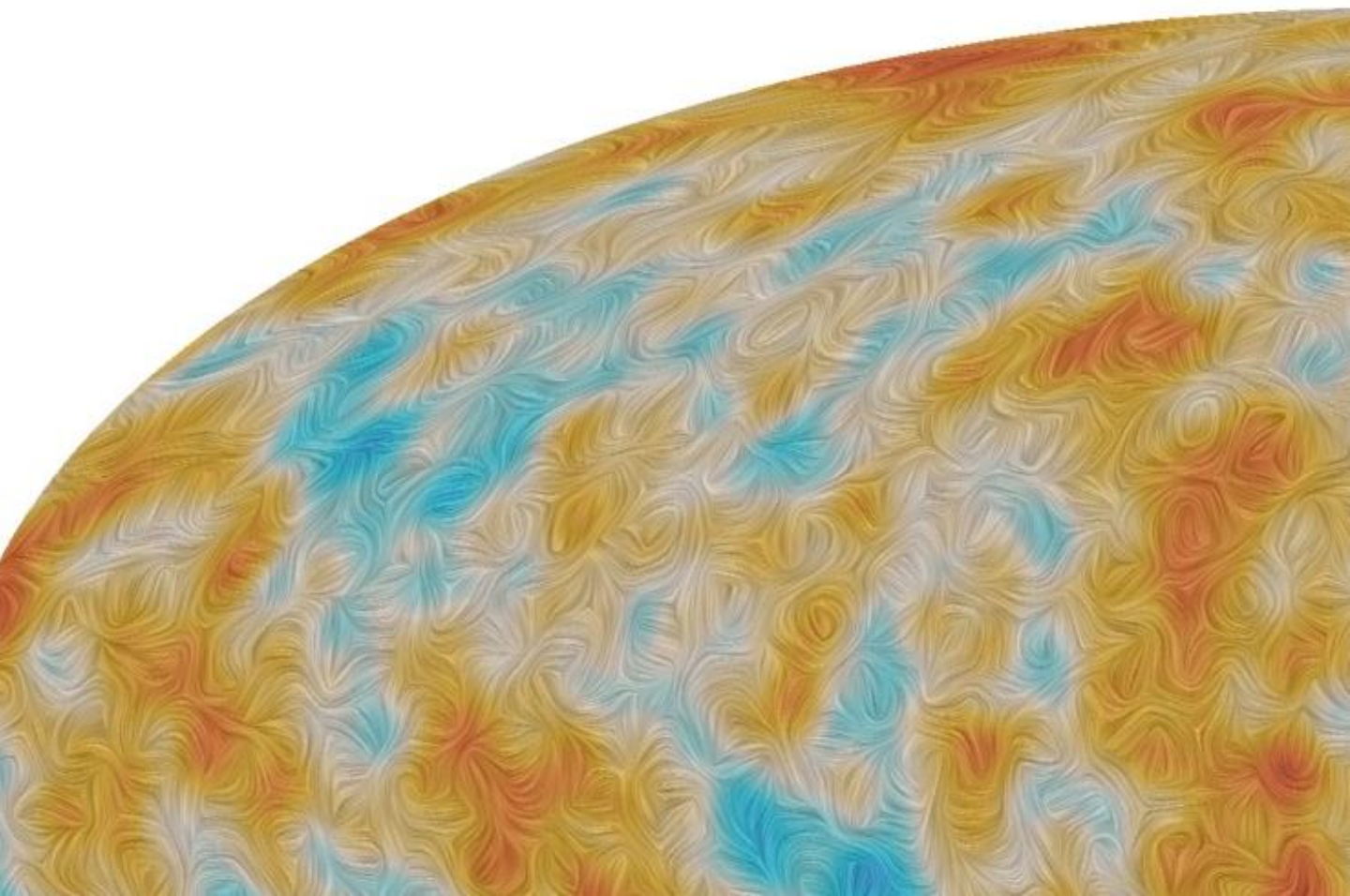


Guía 7

Estadística de Bose-Einstein



Problema 7.1

Considere un sistema formado por 2 partículas, cuyo espectro de energía (E) es

$$E(n) = n\varepsilon$$

Donde cada nivel de energía n , tiene una degeneración $g(n) = 2n + 1$. Considere que las partículas obedecen las siguientes estadísticas:

- Fermi-Dirac
 - Bose-Einstein
 - Maxwell-Boltzmann
- Calcule la función microcanónica del ensamble cuando la energía del sistema tiene un valor constante $E = N\varepsilon$.
 - Calcule la función partición del ensamble canónico, cuando el sistema se encuentra en contacto con un reservorio térmico a una temperatura T .
 - Investigue la relación entre las funciones partición obtenidas en los diferentes tipos de estadísticas.
 - Discuta bajo qué condiciones los bosones y fermiones se comportan como partículas de Boltzmann.

Problema 7.2

Considere un sistema de partículas indistinguibles, donde el estado del sistema es especificado como se detalla a continuación.

Partículas con spin nulo. Las partículas están etiquetadas con un índice i , con energía $\varepsilon(i)$, cada nivel de energía es degenerado (es decir el estado $\varepsilon(i)$ tiene el mismo valor para diferentes valores de índice i).

Cada estado ocupado por varias partículas corresponden a un set con número de ocupación $\{n_i\}$, donde n_i describe el número de partículas que ocupan el nivel i de energía, cuyo valor es desde 0 hasta M .

- Use el ensamble gran canónico para obtener expresiones para la presión P , el número promedio de partículas $\langle N \rangle$, la energía interna $U = \langle E \rangle$, de la forma $T^\alpha f(\mathbf{z})$, donde $\mathbf{z} = \exp(\beta\mu)$ representa la fugacidad. Considere la energía de las partículas de la forma.

$$\varepsilon_i = \frac{|p|^2}{2m}$$

En un espacio d-dimensional.

- Obtenga la probabilidad $P_i(\mathbf{n}_i, T, \mu)$, de tener n_i partículas en el estado i , a una temperatura T .
Calcule el desplazamiento cuadrático $(\Delta n_i)^2 = \langle (n_i - \langle n_i \rangle)^2 \rangle$ medio en función de la temperatura.
- Obtenga el numero promedio de ocupación $\langle n(\varepsilon) \rangle$ de un nivel de energía ε , evaluada en $T = 0$.

- Identifique las circunstancias que corresponden a las estadísticas de Fermi-Dirac, Bose-Einstein y Maxwell-Boltzmann.

Problema 7.3

Considere un gas de N bosones con spin cero en un recipiente d -dimensional de volumen V . La energía de las partículas está dada por la siguiente expresión,

$$\varepsilon_p = \alpha |p|^s$$

Donde α y s son constantes positivas.

- Calcule la expresión para el número medio de partículas por unidad de volumen en el estado fundamental y el número medio total de partículas en el estado excitado en términos de la temperatura T , y de la fugacidad z .
- Calcule los posibles valores de s y d , para que ocurra la condensación de Bose-Einstein.
- Calcule la ecuación de estado de este gas.
- Calcule la población relativa del estado fundamental N_0/N en función de la temperatura asumiendo que el cociente N/V permanece constante.
- Calcule la entropía por unidad de volumen del gas en términos de la temperatura. Para un valor constante N/V , calcule la discontinuidad en el calor específico, a la temperatura crítica. Muestre que para $d = 3$ y $s = 2$, no hay discontinuidad.
- Evalúe la discontinuidad en la derivada del calor específico a la temperatura crítica para el caso de $d = 3$ y $s = 2$.

Problema 7.4

La primera observación de la condensación de Bose-Einstein en un vapor diluido de átomos se realizó en el año 1995 por M Anderson y colaboradores. [Science 269 198 (1995)]. El condensado se produjo en un vapor de ^{87}Rb confinado en un campo magnético. La primera evidencia de condensación apareció a una temperatura cercana a los 170 nK , con $2.5 \times 10^{12} \text{ átomos/cm}^3$.

Compare la temperatura de condensación del experimento con la temperatura crítica para un gas ideal de Bose a la misma densidad.

Problema 7.5

Considere un gas de bosones tridimensional, donde cada partícula tiene una energía

$$\varepsilon_{p,n} = \frac{|p|^2}{2m} + \alpha n$$

Donde α es una constante positiva y $n = -j, \dots, j$ un entero.

- Calcule la expresión de la presión P , válida en el límite termodinámico, además calcule el número de partículas por unidad de volumen N/V en términos de la temperatura T y de la fugacidad z .

Calcule las condiciones para que ocurra la condensación de Bose-Einstein.

Problema 7.6

Calcule para un gas de bosones, la primera corrección cuántica a la función de estado de un gas clásico, expresado como una expansión del virial

$$\frac{PV}{NkT} = 1 + B_2 v^{-1} + \dots$$

Donde v es el volumen específico.

Problema 7.7

Considere un conjunto de r puntos en el espacio llamados **celda unidad**. Si dicha celda se repite N veces el conjunto de puntos es llamado **red**. Si los átomos son puestos en los Nr puntos, se tiene una representación idealizada de un **crystal**. Si cada átomo es considerado un oscilador con 3 grados de libertad, el cristal tiene $3rN$, grados de libertad. Cada grado de libertad es llamado modo de oscilación (\mathbf{q}, s) . El vector de onda \mathbf{q} , tiene N posibles valores, y el índice de polarización s tiene $3r$ posibles valores.

- Pruebe, utilizando un ensamble canónico que para una temperatura T el número cuántico $n(\mathbf{q}, s)$ de un modo de oscilación (\mathbf{q}, s) , es $(\exp(\hbar\omega/kT))^{-1}$, donde ω , es la frecuencia angular.
- Muestre que la energía del cristal se puede expresar de la siguiente manera:

$$E_Z + E_{ter} = \sum_{\mathbf{q}, s} \frac{1}{2} \hbar\omega(\mathbf{q}, s) + \sum_{\mathbf{q}, s} \hbar\omega(\mathbf{q}, s) \langle n(\mathbf{q}, s) \rangle$$

Donde E_Z representa la energía mínima, y E_{ter} representa la energía térmica, y se anula para $T = 0$.

- Para una dirección específica del vector \mathbf{q} , con un elemento de ángulo sólido $d\Omega = d\cos[\theta]d\phi$ en el \mathbf{q} -espacio y bajo la observación de que $v/8\pi^3$ es el número de vectores de onda por unidad de volumen en el \mathbf{q} -espacio, en un sólido de volumen v , para cada polarización. Reemplace la suma por una integral en la ecuación anterior y obtenga la expresión

$$E_{ter} = \frac{vkT}{8\pi^3} \sum_s \int \int \int \frac{y}{\exp(y) - 1} q^2 dq d\Omega$$

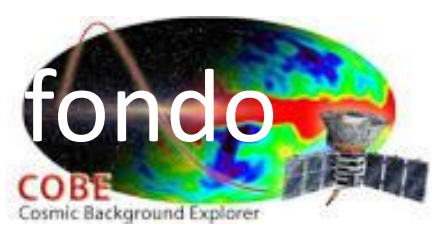
Con $y = \frac{\hbar\omega}{kT}$

Donde q es el módulo del vector \mathbf{q} , y la superficie $q(\theta, \phi)$, satisface la condición

$$\frac{v}{8\pi} \sum_s \int q^2 dq d\Omega = 3rN$$

Cada modo de oscilación con un vector de onda q y polarización s , es denominado **fonón**.

Radiación cósmica de fondo



La radiación de fondo de microondas fue predicha originalmente por George Gamow, Ralph Alpher y Robert Hermann en 1948, en el marco de la teoría del Big Bang. Es interesante remarcar que en esa época el modelo más aceptado de universo correspondía a un universo estático. En ese contexto las ideas sobre un universo en evolución fueron poco aceptadas. Sin ningún tipo de evidencia experimental que respaldara el modelo del Big Bang, las ideas de un universo dinámico no despertaron gran interés en la comunidad científica.

Serendipios, es la palabra que se utiliza para describir un descubrimiento fortuito, como el que ocurrió en 1964.

En ese año, Arno Penzias y Robert Woodrow Wilson en los Laboratorios Bell de Crawford Hill cerca de Holmdel Township (Nueva Jersey) habían construido un radiómetro Dicke que intentaron utilizar para radioastronomía y experimentos de comunicaciones por satélite. Su instrumental tenía un exceso de temperatura de ruido de 3,5 K con el que ellos no contaban. Lo desconcertante del ruido detectado era que estaba presente en todas las mediciones que realizaban, sin importar donde se apunte la antena, la polarización, etc el ruido se encontraba en todas las mediciones. Completamente desconcertados los dos radioastrónomos comenzaron a descartar posibles fallas del equipo, llegando incluso a pensar que las palomas que anidaban dentro de la antena podían ser las culpables de dicho ruido.

¿Cuál era el origen de aquel exceso de temperatura de ruido ?.

La respuesta supuso uno de las evidencias más fuertes a la teoría del Big Bang, y el premio Nobel para ambos radioastrónomos .

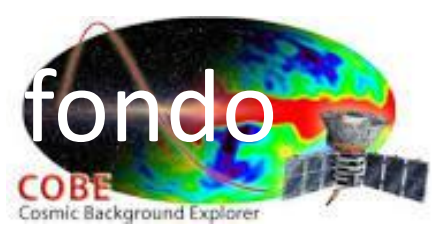
«Muchachos, nos han robado la exclusiva», fue la frase que pronunció Arno Dicke cuando se enteró del descubrimiento fortuito de Wilson. Y Penzias.

Arno Dicke, trabajaba en la universidad de Harvard, y se encontraba trabajando sobre las ideas originales de Gamow sobre el origen de los elementos en el big Bang. De acuerdo con sus estimaciones el universo debería estar completamente embebido en un mar de fotones con una temperatura próxima a los 10k, remanente del Big Bang.

Para entender donde se originó la radiación de fondo debemos remontarnos 13 000 000 000 de años. En esa época el universo tenía una edad de unos 300 000 años. No debemos pensar en un universo tal como lo conocemos hoy día, en esa época el universo consistía en un mar de núcleos atómicos, electrones y fotones. Con una temperatura media de más de 3000 K, los fotones tenían tanta energía que impedían que los electrones se unan a los núcleos para formar átomos. Esta época es llamada la época oscura del universo porque los fotones no viajaban completamente libres por el universo, debido a la fuerte interacción con los bariones. Debido a la expansión del universo, la temperatura del mismo descendió hasta que los fotones no tuvieron suficiente energía como para ionizar los átomos que se formaban. En esa época, llamada época de recombinación, se produjo la separación entre la materia bariónica, que ahora podía formar átomos y la radiación que podía viajar libremente por el espacio sin interactuar con los bariones. El universo se volvió transparente. Los fotones que en esa época tenían una temperatura promedio de 3000k, son las reliquias del Big Bang que observamos hoy a una temperatura de 2,7k.

Luego de su descubrimiento en 1964, se llevaron a cabo una gran cantidad de experimentos sobre la radiación de fondo. Lamentablemente, la atmosfera terrestre dificulta la medición de dicha radiación, realizándose sin éxito experimentos con globos estratosféricos.

Radiación cósmica de fondo



En 1992, se lanzó el satélite COBE (cosmic background explorer), para analizar en detalle la radiación de fondo. Sorprendentemente los resultados obtenidos evidenciaban una isotropía de la radiación respecto del valor $2,73\text{k}$ de 10^{-5}k . Más sorprendente aún resultaba la correspondencia entre los valores medidos para diferentes frecuencias y la ley de radiación de un cuerpo negro a $2,73\text{k}$. Los resultados se pueden observar en la figura (1). Siendo datos experimentales se preguntaran donde están las barras de error?. La correspondencia entre los datos y la ley de Plank de radiación de cuerpo negro es tan grande que las barras de error caen dentro de la línea teórica y por lo tanto no se aprecian en el gráfico.

En resumen la radiación de fondo representa una de las evidencias más fuertes del Big Bang y es la mejor distribución de cuerpo negro medida hasta la fecha.

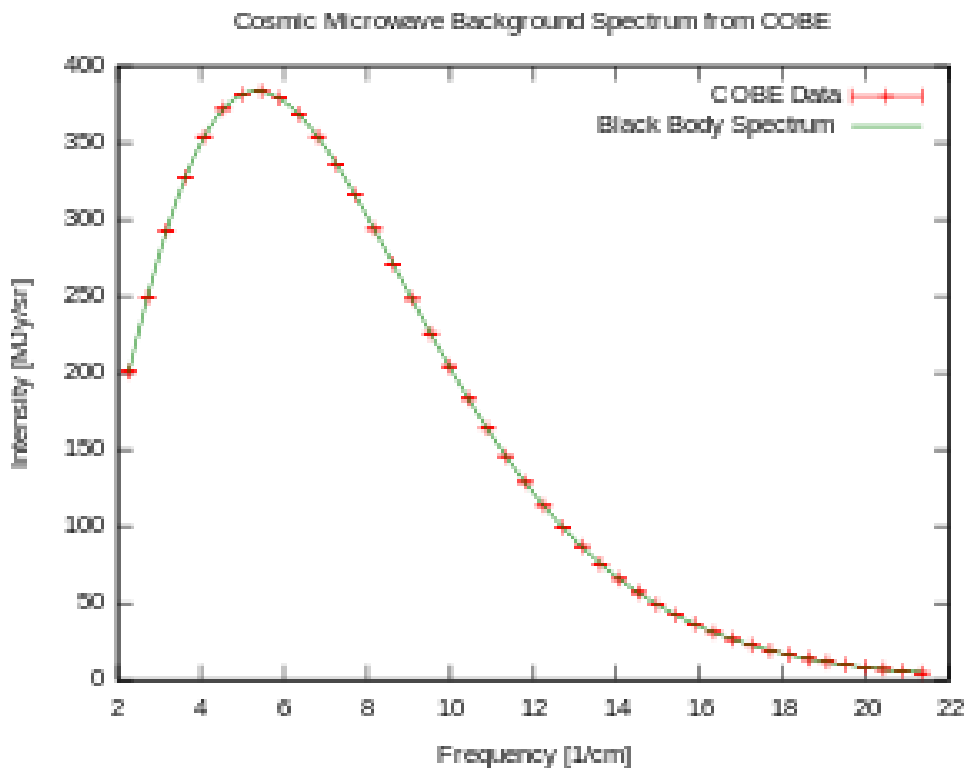


Fig 1: Datos del COBE mostraron una coincidencia perfecta entre la curva de cuerpo negro predicha por la Teoría del Big Bang y la observada en el fondo de microondas.

Referencias:

A. A. Penzias y R. W. Wilson, "A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s," Astrophysical Journal 142 (1965), 419.

R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll y D. T. Wilkinson, "Cosmic Black-Body Radiation," Astrophysical Journal 142 (1965)

D. J. Fixsen, et. al, "The Cosmic Microwave Background Spectrum from the full COBE FIRAS data set", Astrophysical Journal 473, 576–587 (1996).

Problema 7.8

Describa los modelos clásico, de Einstein y de Debye, desarrollados para explicar el c_v de un sólido.

- Observe que el modelo clásico describe correctamente los valores experimentales a temperaturas altas.
- Que el modelo de Einstein tiende asintóticamente al valor clásico para $T \gg \Theta_E$, donde Θ_E es la temperatura de Einstein, pero falla en la descripción a bajas temperaturas (T^3).
- Muestre que el modelo de Debye, tiende asintóticamente al valor clásico para $T \gg \Theta_D$, donde Θ_D es la temperatura de Einstein, y a bajas temperaturas, presenta un comportamiento $\sim T^3$.

Problema 7.9

El sistema considerado consiste en una cadena lineal de $N+1$ átomos alternados del tipo A con masa m y del tipo B, con masa M . Los átomos de los extremos se encuentran fijos a una distancia $L = (2N + 1)a$. Los demás átomos oscilan en la dirección de la cadena. Ver figura.



Una fuerza armónica con constante elástica K , actúan entre los átomos.

- Calcule la relación de dispersión para los modos normales de vibración de la cadena.
- Obtenga los modos de baja frecuencia (acústicos) y de alta frecuencia (ópticos).
- Investigue que sucede $m = M$.
- Identifique bajo qué circunstancias la rama óptica es independiente de la longitud de onda.
- Bajo las condiciones anteriores, construya un simplificado modelo del espectro asumiendo que todos los modos ópticos tiene la misma frecuencia ω_0 , y que los modos acústicos son tratados bajo el modelo de Debye. Asumiendo que $\omega_0 > \omega_D$, la densidad de estados es

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{L}{\pi c} & \omega < \omega_D \\ N\delta(\omega - \omega_0) & \omega > \omega_D \end{cases}$$

Donde c es la velocidad del sonido.

- Calcule la frecuencia de Debye para este modelo.
- Calcule la dependencia con la temperatura T , del calor específico, par $kT \ll \hbar\omega_D$ y $k \gg \hbar\omega_D$.

Problema 7.10

El grafito presenta una estructura cristalina formada por capas, donde los enlaces entre los átomos de carbono que lo componen son muchos más débiles entre átomos de diferentes capas que entre átomos de la misma capa. Experimentalmente se observa que el calor específico del grafito es proporcional a T^2 , a bajas temperaturas. ¿Cómo debe adaptar la teoría de Debye para explicar dicho comportamiento?

Problema 7.11

Extienda el modelo de Debye para un sólido d-dimensional.

- Obtenga la expresión del calor específico para $T \gg$.
- Obtenga la expresión del calor específico para $T \ll$.
- Evalúe ambas expresiones para $d=3$.

Problema 7.12

Calcule la expresión para la presión P , densidad de energía u , densidad de entropía s , y el calor específico c_v por unidad de volumen, para la radiación de un cuerpo negro en una cavidad de dimensión d , a una temperatura T . Evalúe explícitamente para $d=3$.

Problema 7.13

Considere un átomo en una cavidad que contiene radiación de cuerpo negro. Cuando el átomo se encuentra en un estado a , con energía E_a , tiene una probabilidad por unidad de tiempo $\wp[(a, n_k) \rightarrow (b, n_k + 1)]$ de producir una transición al estado b , con energía $E_b < E_a$, emitiendo un fotón de frecuencia $\omega = (E_a - E_b)/\hbar$. De igual manera notaremos con $\wp[(b, n_k) \rightarrow (a, n_k - 1)]$, la probabilidad asociada al proceso de absorción. De acuerdo a la electrodinámica cuántica (QED)

$$\begin{aligned}\wp[(a, n_k) \rightarrow (b, n_k + 1)] &= (n_k + 1)\wp[(a, 0) \rightarrow (b, 1)] \\ \wp[(b, n_k) \rightarrow (a, n_k - 1)] &= n_k\wp[(b, 1) \rightarrow (a, 0)]\end{aligned}$$

Use la condición de equilibrio térmico y QED, para derivar la ley de Planck de radiación de cuerpo negro.

Problema 7.14

Determine el máximo de la distribución de Planck en función de la frecuencia y de la longitud de onda.

- Utilice la expresión $x^a / (\exp(x) - 1)$ con $a=3$ y $a=5$ respectivamente.
- Verifique la ley de Wien $\lambda_{max}T = cte$
- Sabiendo que la radiación emitida por el Sol se encuentra centrada en torno a un valor $5 \times 10^{-5} cm$. Determine la temperatura del Sol.



Con h de ayuda

El domingo 7 de octubre de 1900 Rubens y su esposa visitaron a los Planck en

su casa de Berlín. Rubens contó a Planck sus progresos sobre las mediciones del espectro de cuerpo negro. Recordemos que Planck llevaba años tratando de encontrar la correcta descripción de la emisión de un cuerpo negro a través de la teoría electromagnética, la termodinámica y las ideas estadísticas. En la charla, Rubens mostró que para longitudes de onda larga, la ley de Wien no se cumplía, y sin embargo las medidas se ajustaban a la ley de Rayleigh. Cuando Rubens y su esposa se fueron, Planck debió de retirarse a su despacho.

Probablemente fuera esa misma tarde cuando encontró la ley que le daría fama internacional. Planck no lo dedujo de los primeros principios, sino que simplemente añadió un término más a modo de prueba, a una relación que había encontrado previamente para la entropía de su sistema de osciladores.

Al día siguiente, Planck envió a Rubens una carta con la fórmula que había deducido

$$\mu_\nu = C \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{T}\right) - 1}$$

Uno días más tarde, Rubens visitó nuevamente a Planck para comunicarle que su fórmula se ajustaba perfectamente a las mediciones experimentales. Volvamos nuevamente a la tarde del domingo 7, e imaginemos a Planck trabajando en su despacho, mucho señalan que ese día nació la física cuántica. Planck describirá posteriormente en una carta enviada a su amigo R.W.Wood aquella situación, a la cual describió como un "acto de desesperación".

"Había estado peleándome con el problema del equilibrio entre la materia y la radiación durante seis años, sin ningún resultado, sabía que el problema era de una importancia fundamental en física, conocía la fórmula que reproducía la distribución espectral de la energía, tenía que encontrar una interpretación teórica a cualquier precio, no importa lo alto que fuera".

Cuando se vio forzado a admitir la relación $\varepsilon = h\nu$, (la letra h fue elegida por Planck, por la palabra ayuda, hilfe, en alemán), la contempló como una suposición puramente formal y no pensó demasiado en ella. Lo importante era que lo había llevado a la expresión que buscaba. En los años siguientes, varios físicos llamaron la atención sobre las consecuencias radicales de esa, aparentemente inocente, suposición.

En 1905 Einstein profundiza la concepción cuántica de la luz. En un artículo titulado *Sobre un punto de vista heurístico concerniente a la producción y transformación de la luz*, es normal referirse a él por la teoría del efecto fotoeléctrico, aunque este es solo uno de los fenómenos que se tratan. En la introducción de este artículo podemos leer:

La teoría de la luz, que opera con funciones espaciales continuas, se ha mostrado soberbia. Para describir fenómenos puramente ópticos y probablemente nunca será reemplazada por otra teoría. Deberíamos tener en cuenta, sin embargo que las observaciones ópticas se refieren a promedios temporales antes que a valores instantáneos, y es perfectamente concebible, pese a la completa confirmación experimental de la teoría de la difracción, reflexión refracción dispersión, etc. que la teoría de la luz, que opera con funciones espaciales continuas, lleve a contradicciones cuando se aplique a los fenómenos de emisión y transformación de la luz.

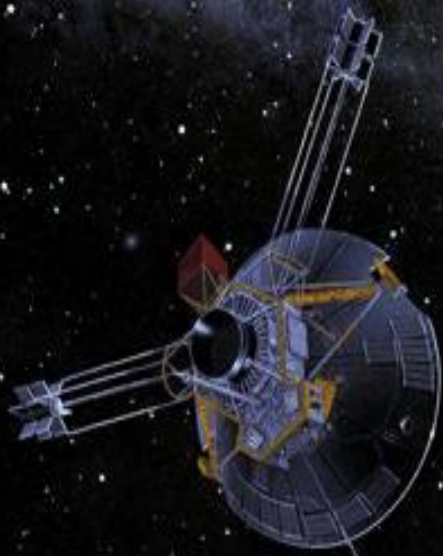
De hecho, creo que las observaciones de la radiación de cuerpo negro, fotoluminiscencia, producción de rayos catódicos por luz ultravioleta y otros fenómenos asociados con la emisión y transformación de la luz parecen entenderse más fácilmente si se supone que la energía de la luz está distribuida por el espacio de forma discontinua.

La primer parte del artículo está dedicada a discutir algunas consecuencias de la ley de Planck que habían escapado al propio creador. Entre ellas, una bastante sorprendente que la entropía de la radiación a una densidad suficientemente baja, tiene una expresión análoga a la de un gas ideal. Este hecho refuerza la idea de que la luz consiste en partículas independientes. Einstein además, proporcionó otra demostración más de que la ley de Rayleigh-Jeans y no la ley de Planck, es la que se obtiene de los principios de la física estadística clásica.

El artículo de Einstein suscitó bastante atención, pero fue duramente criticado, incluso por el propio Planck.

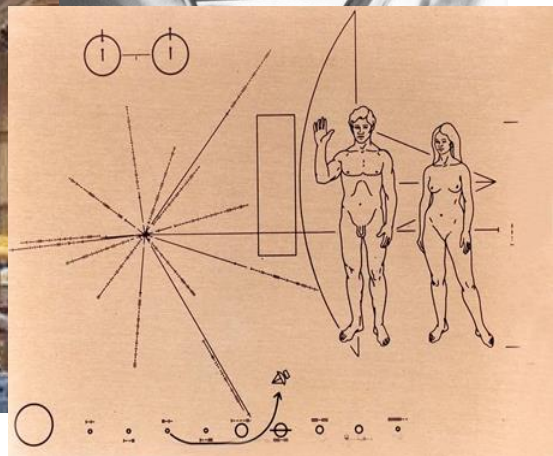
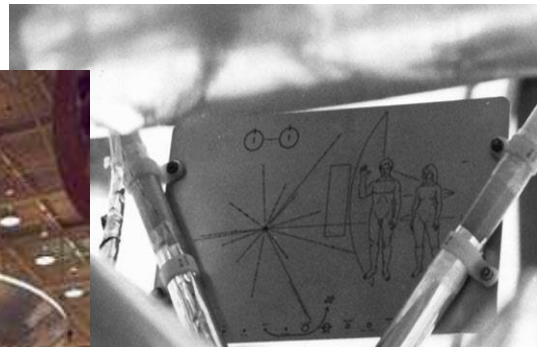
Entre 1914 y 1915, el físico Robert Millikan (1868-1953), presentó ante la asociación americana de física sus resultados sobre el estudio experimental del efecto fotoeléctrico, en el artículo del físico estadounidense, termina con una frase, que no deja lugar a dudas:

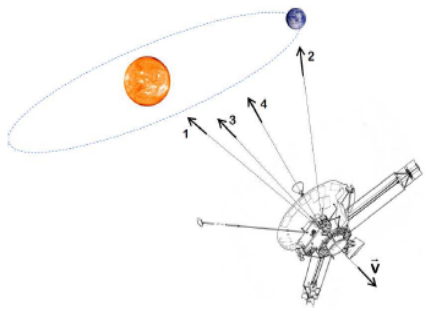
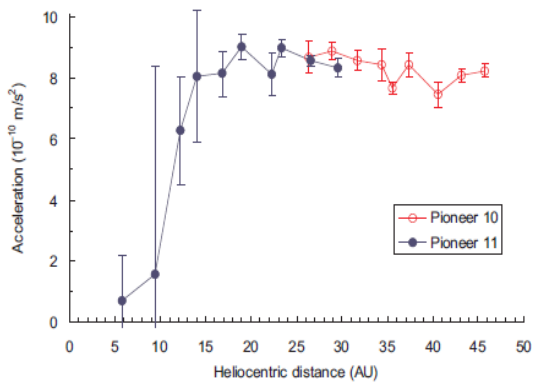
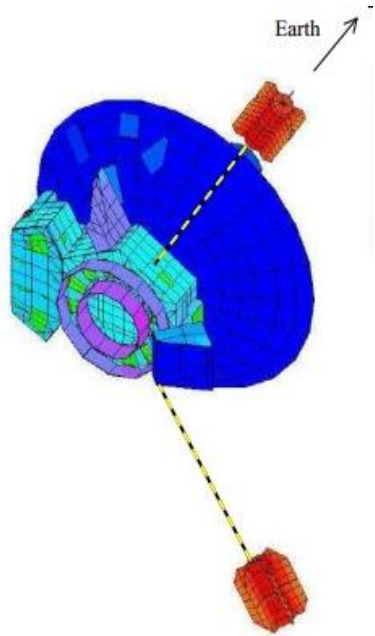
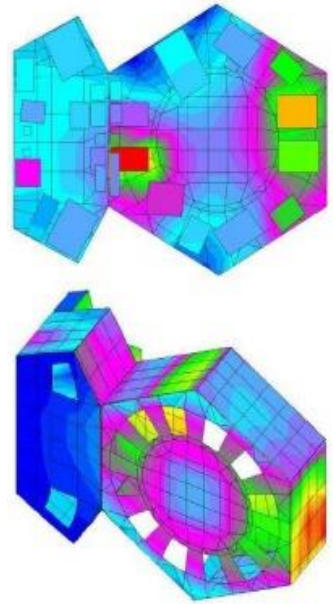
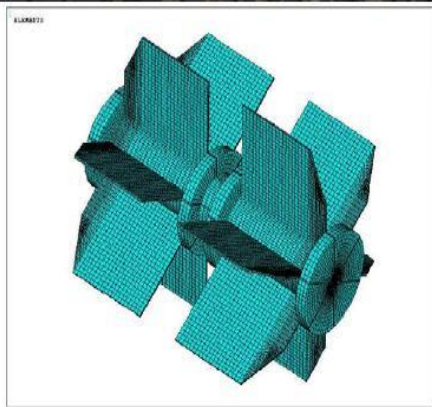
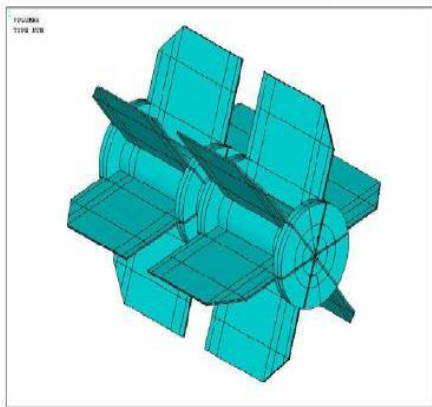
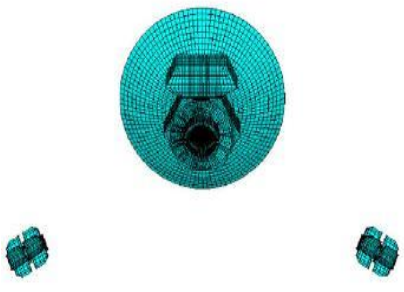
La ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico, ha sido sometida a tests muy exigentes y parece en todos los casos predecir exactamente los resultados observados. Einstein recibiría el premio Nobel, por este trabajo en el año 1921.



La anomalía de las sondas Pioneer

La anomalía de las sondas Pioneer se refiere a la aparente aceleración que las sondas Pioneer 10 y 11 han mostrado cuando se encontraban a distancias del Sol entre 20 y 70 UA (unidades astronómicas). Esta aceleración $a_P = (8,74 \pm 1.33) \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$ viola aparentemente la ley de gravitación universal de Newton (la ley de la inversa del cuadrado) y actualmente no tiene ninguna explicación definitiva, aunque se han propuesto muchísimas explicaciones posibles (más o menos convincentes). Hoy en día, la existencia de la anomalía no puede ser puesta en duda. Sin embargo, los nuevos análisis de los datos radiométricos de las Pioneer indica que la aceleración anómala no es constante sino que va decreciendo ligeramente conforme pasa el tiempo. Además, la dirección a la que apunta la aceleración anómala tampoco está clara (tiene un error de unos 3°). Podría apuntar al Sol, hacia la Tierra, en la dirección opuesta a la velocidad de la sonda o en la dirección del eje central de la sonda. La anomalía se ha observado en la Pioneer 10 hasta una distancia de 70 UA, y en la Pioneer 11 desde una distancia de 20 UA, sin embargo, no se sabe si la anomalía estaba presente a distancias más pequeñas. La anomalía presenta un error sistemático oscilatorio con variaciones diarias y anuales claramente visibles, pero no se sabe si tienen algo que ver con la explicación de la anomalía. Las Pioneer también presentan una anomalía de espín, pero no se sabe si está relacionada con la aceleración anómala. De todas las explicaciones propuestas, la aceptada como posible origen de la anomalía en las sondas es la generada por una anisotropía en la radiación térmica de la sonda.





Bibliografía:

S. G. Turyshev¹, V. T. Toth, G. Kinsella, S. Lee, S. M. Lok, and J. Ellis.
Support for the Thermal Origin of the Pioneer Anomaly. PRL. 108,
241101 (2012) .

S. G. Turyshev¹, V. T. Toth.
The Pioneer Anomaly. arXiv:1001.3686v2 (2010).

B. Rievers, C. Lämmerzahl, M. List, St. Bremer and H. Dittus.
**New powerful thermal modelling for high-precision
gravity missions with application to Pioneer 10/11.** New Journal of
Physics 11,113032. (2009) .

J. D. Anderson, P. A. Laing, E. L. Lau, A. S. Liu, M. Martin Nieto, and S. G.
Turyshev.
Study of the anomalous acceleration of Pioneer 10 and 11. PRD 65,
082004 (2002).

J. D. Anderson, P. A. Laing, E. L. Lau, A. S. Liu, M. Martin Nieto, and S. G.
Turyshev.
**Indication, from Pioneer 10/11, Galileo, and Ulysses Data, of an
Apparent Anomalous, Weak, Long-Range Acceleration.** PRL. 81, 2858–
2861 (1998).