Nombre: Mecánica Estadística 2018

13 de julio de 2018

Examen Final

1- Sea una colección de partículas con spin ½ confinados en una superficie con N sitios. Para cada sitio, tenemos $\sigma = 0$ para una vacancia, $\sigma = +1$ si la partícula tiene spin positivo y $\sigma = -1$ si la partícula tiene spin negativo. La energía de cada sitio es $\varepsilon = -W\sigma^2$donde W es la energía de enlace.

a- Calcule la entropía en función de la magnetización y el número total de partículas. Muestre que es extensiva.

b- Calcule la temperatura, y muestre que puede ser negativa.

2- Describa el modelo de Einstein y el modelo de Debye para un sólido cristalino. Calcule las temperaturas características de ambos modelos, ¿dependen de la dimensión del sistema?

a- Calcule el C_v en ambos modelos en las regiones de $T >>$ y $T <<$, ¿qué criterio utiliza para considerar altas y bajas temperaturas?

3- Considere un gas de moléculas que interactúan con el siguiente potencial:

$$u(r) = \begin{cases} = \infty & r < a \\ = -\mu_0 & a < r < b \\ = 0 & r > b \end{cases}$$

Con a el radio de la molécula.

a- Calcule el segundo término del virial para este gas de partículas interactuantes.

b- Calcule el coeficiente de Joule-Thomson $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)$ y muestre que puede presentar valores positivos y negativos, explique el comportamiento físico del gas asociado a cada caso.

4- *"Pienso que debe existir una ley de la naturaleza que impida a una estrella comportarse de una manera tan absurda"* Arthur Eddington

En 1935, Chandrasekhar especulaba sobre la posibilidad de que existan estrellas más densas que las estrellas enanas blancas. Su argumento se basaba en las propiedades de los fermiones.

a- Modele a la estrella de neutrones como un gas de neutrones (fermiones) completamente degenerado y calcule la ecuación de estado.

b- Calcule la presión generada por la atracción gravitatoria.

c- Combinando ambas expresiones calcule el radio típico de las estrellas de neutrones.

d- Calcule la densidad y la presión.

e- En base a los resultados obtenidos, ¿es correcto suponer el sistema está completamente generado, calcule la temperatura de fermi del sistema.

5- Considere un gas caliente completamente ionizado, que contiene núcleos del tipo A y B, en conentraciones n_A y n_B, con una sección eficaz de fusión σ. Por el momento consideremos que los núcleos B están quietos y los A se mueven con velocidad v.

a- Evalue el producto de la sección eficaz de fusión y la velocidad, considerando una distribución de Maxwell-Boltzmann, $\langle \sigma v_r \rangle$.

b- Con el resultado anterior, calcule la razón de fusión por unidad de volumen, $R_{AB} = n_A n_B \langle \sigma v_r \rangle$, con $\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} exp\left[-\left(\frac{E_G}{E}\right)^{1/2}\right]$ con E_G la energía de Gamow.

c- Muestre que R_{AB} tiene un máximo a una determinada energía y desarrolle en el entorno de dicha energía para finalmente mostrar que la fusión puede ocurrir en una ventana de energía $E_0 \pm \Delta/2$. (Ayuda: recuerde la expresión de una distribución gaussiana).

Solución

Problema 1

Podemos escribir la magnetización del sistema $M = N_\uparrow - N_\downarrow$, la energía $E = -W(N_\uparrow + N_\downarrow)$ y el número total de partículas $N = N_\uparrow + N_\downarrow + N_0$

El número de microestados resulta:

$$\Omega = \frac{N!}{N_\uparrow!\,N_\downarrow!\,N_0!}$$

Resulta conveniente reescribir la expresión anterior como:

$$\Omega(Q,M) = \frac{N!}{\left[\frac{1}{2}(Q+M)\right]!\left[\frac{1}{2}(Q-M)\right]!\,(N-Q)!}$$

Con $N_\downarrow = \frac{1}{2}(Q-M)$ $N_\uparrow = \frac{1}{2}(Q+M)$ $N_0 = N - Q$ con $Q = -\frac{E}{W}$

Calculamos la entropía:

$$S = kln(\Omega)$$

$$S(Q,M) = kln(N!) - kln\left[\frac{1}{2}(Q+M)!\right] - kln\left[\frac{1}{2}(Q-M)!\right] - kln[(N-Q)!]$$

Aplicando la aproximación de Stirling, obtenemos:

$$S(Q,M) = Nln(N) - \frac{1}{2}Qln\left[\frac{1}{4}(Q^2 - M^2)\right] - \frac{1}{2}Mln\left(\frac{Q+M}{Q-M}\right)$$

De manera equivalente,

$$S(Q,M) = -Nqln\left[\frac{1}{2}\sqrt{q^2 - m^2}\right] - \frac{1}{2}Nmln\left[\frac{q+m}{q-m}\right] - N(1-q)ln(1-q)$$

Con, $q = Q/N$ y $m = M/N$ donde se observa que la entropía es extensiva.

La temperatura resulta:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_M$$

Finalmente,

$$T = \frac{W}{kln\left[2(1-q)/\sqrt{q^2 - m^2}\right]}$$

Podemos ver que la temperatura del sistema puede tomar valores negativos considerando por ejemplo $m = 0$ y $q = 3/4$.

Problema 2

El desarrollo completo de ambos modelos, se omite. La temperatura característica de Einstein es $\Theta_E = \frac{\hbar\omega_E}{k}$, y la del modelo de Debye es $\Theta_D = \frac{\hbar\omega_D}{k}$.

Las temperaturas no dependen de la dimensión, solo de las características del sistema.

Problema 3

El segundo término del virial tiene la siguiente expresión:

$$B(T) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(1 - exp(-u(r)/kT)\right)4\pi r^2 dr$$

En este caso, nos queda:

$$B(T) = \frac{2\pi}{3}[b^3 - \exp(u_0/kT)(b^3 - a^3)]$$

Para evaluar el coeficiente de Joule-Thomson utilizamos:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) = \frac{1}{c_p}\left(T\frac{dB}{dT} - B\right)$$

Finalmente,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) = \frac{2\pi}{3}\left[-b^3 + \left(1 + \frac{u_0}{kT}\right)(b^3 - a^3)\exp(u_0/kT)\right]/c_p$$

Problema 4

Es una excelente aproximación considerar a las estrellas de neutrones como un sistema de fermiones completamente degenerado. La energía de Fermi de una estrella de neutrones es aproximadamente $86MeV$, que corresponde a una temperatura de $10^{12}K$, cuando la temperatura de la estrella es del orden de 10^6K.

La presión de degeneración es:

$$p_d = \frac{-\partial\langle E\rangle}{\partial V} = \frac{2}{3}\frac{\langle E\rangle}{V} = \frac{2}{5}\frac{h^2}{8m}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}$$

donde, $\langle E\rangle = \frac{3}{5}\varepsilon_F$, $\varepsilon_F = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3}$

de manera similar, la presión generada por la gravedad es:

$$p_g = \frac{-\partial\langle E\rangle}{\partial V} = -\frac{GM^2}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} V^{-4/3}$$

Igualando ambas presiones, obtenemos:

$$R = \frac{3}{8}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} h^2}{G\pi^{4/3}m^{8/3}} M^{-1/3}$$

considerando la masa de la estrella $M = 1{,}5M \odot = 3.10^{30}kg$, obtenemos:

$$R \simeq 10{,}75km$$

$$p \simeq 2.10^{33}Pa$$

$$\rho \simeq 6.10^{17}kg/m^3$$

Problema 5

Sea $\langle \sigma v_r \rangle = \int_0^\infty \sigma v_r P(v_r) dv_r$, utilizando una distribución de velocidades del tipo Maxwell-Boltzmann, obtenemos:

$$\langle \sigma v_r \rangle = \left[\frac{8}{\pi m}\right]^{1/2} \left[\frac{1}{kT}\right]^{3/2} \int_0^\infty E\sigma(E) exp\left[-\frac{E}{kT}\right] dE$$

De manera similar,

$$R_{AB} = n_A n_{B\left[\frac{8}{\pi m}\right]^{1/2}\left[\frac{1}{kT}\right]^{3/2} \int_0^\infty S(E) exp\left[-\frac{E}{kT} - \left(\frac{E_G}{E}\right)^{1/2}\right] dE}$$

Donde la razón de fusión, muestra un máximo en:

$$E_0 = \left[\frac{E_G (kT)^2}{4}\right]^{1/3}$$

En el entorno de dicha energía, existe una ventana de energía en la cual ocurrirá la fusión:

$$exp\left[-\frac{E}{kT} - \left(\frac{E_G}{E}\right)^{1/2}\right] \approx exp\left[-3\left(\frac{E_G}{4kT}\right)^{1/3}\right] exp\left[-\left(\frac{E - E_0}{\Delta/2}\right)^2\right]$$

con $\Delta = \frac{4}{3^{1/2}2^{1/3}} E_G^{1/6} (kT)^{5/6}$