# J.S.BELL

## VARIABLES OCULTAS

2016

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco

En 1964 John S. Bell envió para su publicación dos artículos, "Sobre la paradoja de Einstein-Podolsky-Rosen" y "Sobre el problema de las variables ocultas en la mecánica cuántica". El primero se publicó en la revista *Physics* en noviembre de 1964. El segundo sin embargo, por una serie de contratiempos se publicó dos años después, en 1966. Los 50 años de la publicación de este artículo es una excelente excusa para hablar durante este cuatrimestre de variables ocultas, medias, entrelazamiento, lavarropas,etc.

2

# EDICIONES BOB AND TRASH

Todos los derechos reservados.
20 de diciembre de 2016.

«Ninguna teoría
física de variables
ocultas locales
puede reproducir
todas las
predicciones de la
mecànica cuàntica.»

J.S.Bell

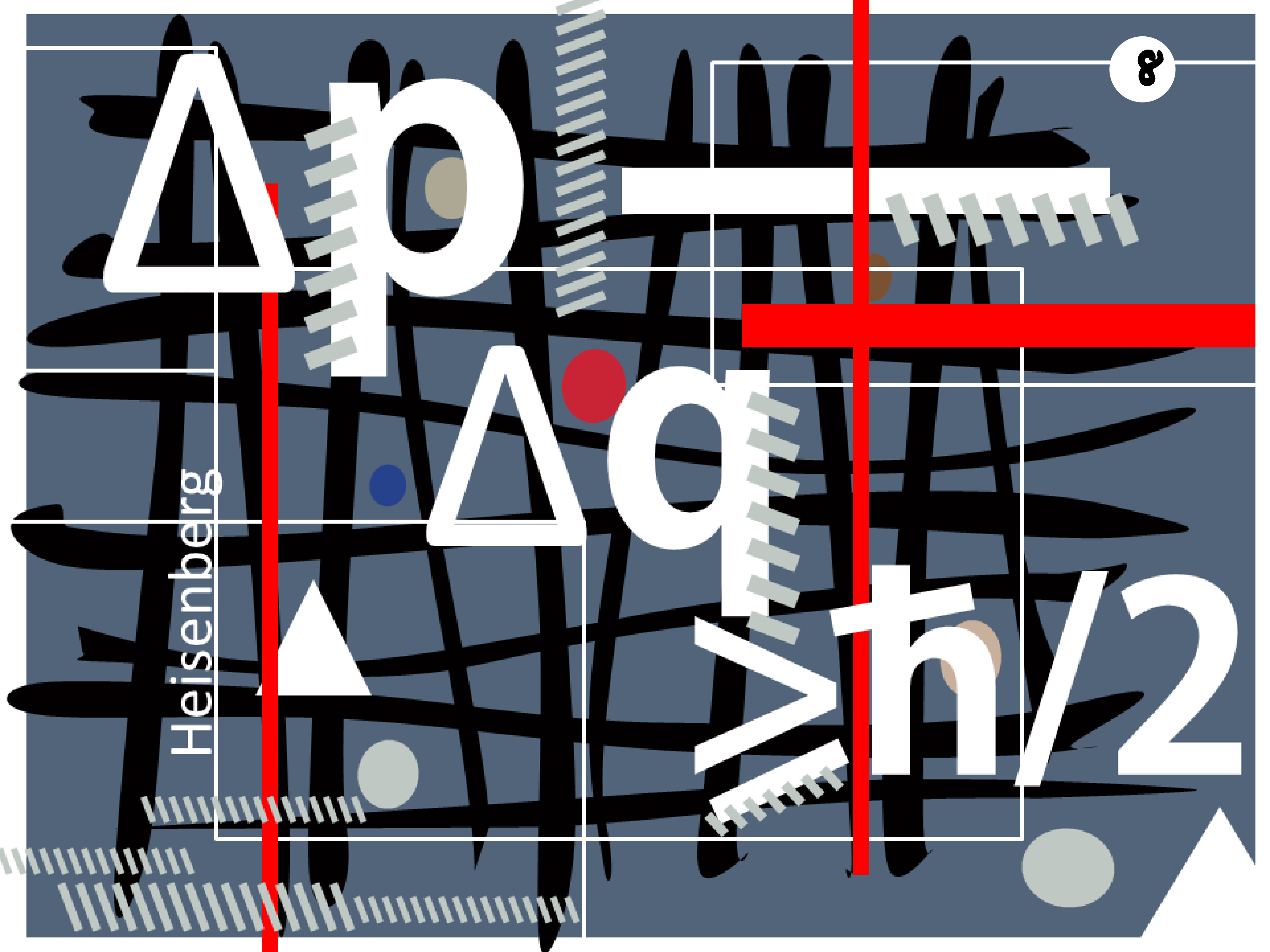
# BELL


6

«El teorema de Bell es el descubrimiento más profundo de la ciencia*»

H. P. Stapp

*Henry, P. Stapp, Bell´s Theorem and World Process. Nuovo Cimento Vol. 29B, No 2, p 270 (1975)



Δp Δq ≥ ħ/2
Heisenberg
8

Luego de las ideas desarrolladas en «Sobre un punto de vista heurístico concerniente a la producción y transformación de la luz», publicado en 1905, Einstein retoma el estudio de los cuantos recién en 1916, luego de desarrollar la teoría de la relatividad general. Durante este lapso de tiempo, sin embargo, las ideas cuánticas comienzan a cosechar sus primeros éxitos. En 1913, un joven Danés de 28 años llamado Niels Bohr logra explicar las líneas espectrales del hidrógeno, al desarrollar un modelo atómico basado en las ideas cuánticas. De acuerdo con el modelo atómico de Bohr, las órbitas del electrón están cuantizadas, entonces, cuando un electrón salta de una órbita o nivel energético a otro, emite o absorbe luz de una determinada frecuencia que depende de la magnitud del salto cuántico.

En julio de 1916, Einstein desarrolla una nueva deducción de la ley de Planck, a partir de un modelo simplificado de átomo de Bohr. El átomo imaginado por Einstein consta solo de dos niveles de energía e interactúa con la radiación a través de tres procesos: emisión espontánea, emisión estimulada y absorción. **Y en este punto aparece el azar**. Einstein descubre que el instante en el que produce la transición espontánea de un nivel de energía a otro es completamente azaroso.

La incomodidad de Einstein con el concepto de azar, se evidencia en una carta enviada a Max Born en 1920:

«La cuestión de la causalidad también me preocupa mucho, ¿Pueden la absorción y emisión de cuantos de luz ser entendidas como un requisito de la causalidad o seguirán siendo un residuo estadístico?. Debo admitir que, en este punto, mis convicciones no aclaran gran cosa. Pero lo cierto es que, si me viese obligado a renunciar completamente a la causalidad, sería mucho más infeliz»[1].

En 1924 el científico Alemán todavía continúa esforzándose por aceptar su descubrimiento, al respecto escribe: «La idea de que un electrón expuesto a radiación elija, no solo el momento de saltar, sino la dirección también de su salto, me parece completamente intolerable. Porque en tal caso, se asemejaría más a un fenómeno propio de un zapatero remendón o de un crupier que de un fenómeno físico»[2]. «Dios no juega a los dados»[3], diría posteriormente, sin embargo… en 1925 Schrödinger desarrolla su famosa ecuación de onda, en 1926 Max Born esboza la interpretación estadística de la función de onda. En 1927 en el congreso Volta, Bohr presenta los elementos de la que acabará conociéndose como la interpretación de Copenhague, ese mismo año Heisenberg descubre el principio de incertidumbre. **El concepto de probabilidad se instala definitivamente en la teoría cuántica.**

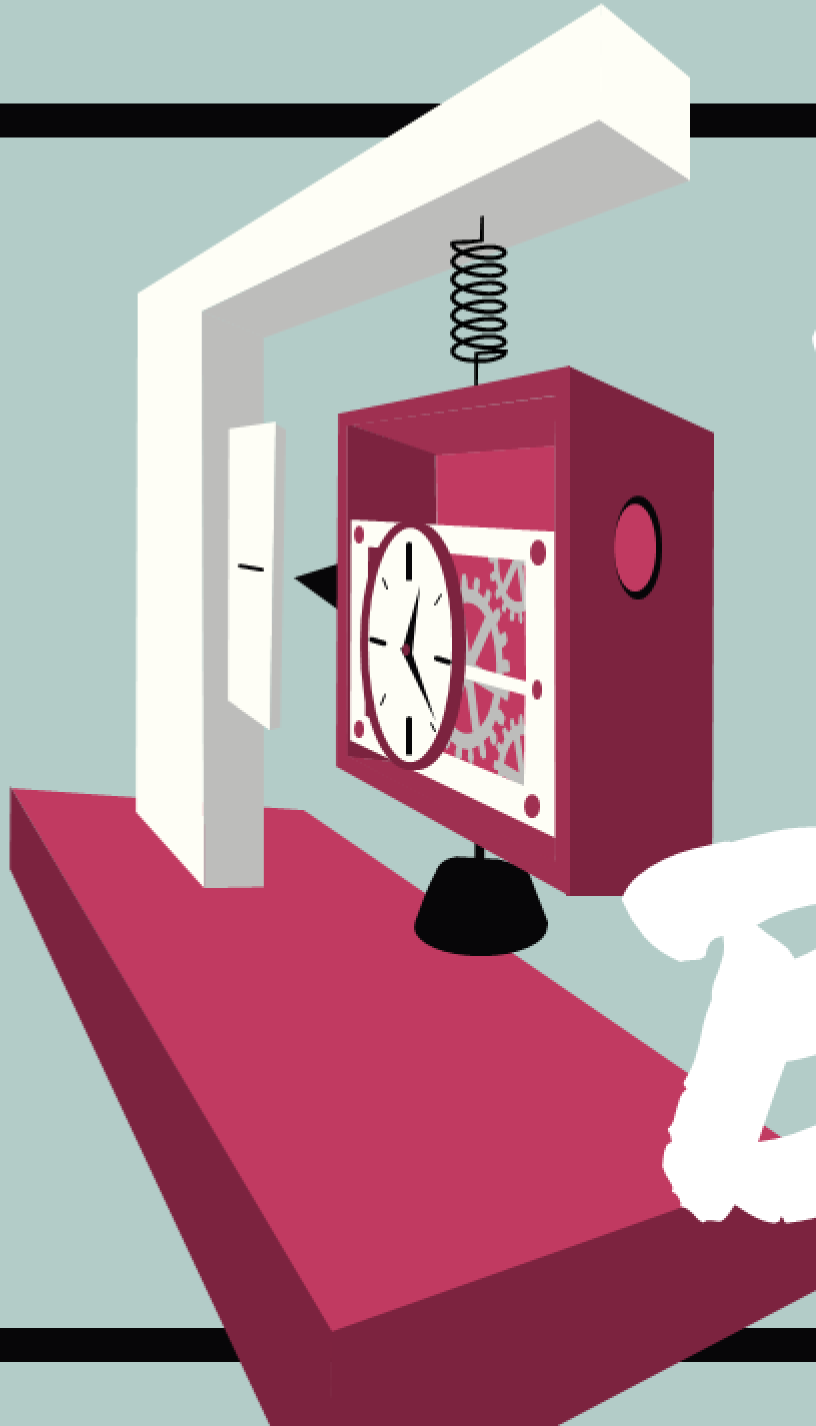
El principio de Heisenberg $\Delta p \Delta q \geq \hbar/2$ establece una relación entre las incertidumbres asociadas al momento $(p)$ y posición $(q)$ del electrón, por lo tanto, si queremos saber con precisión absoluta el momento del electrón es imposible conocer la posición y viceversa. Ahora, ¿este fenómeno es una característica de la naturaleza, o es una muestra de nuestra incapacidad para desarrollar una teoría con la cual podamos determinar ambas magnitudes? Este es el eje central del debate que Einstein y Bohr sostendrán sobre el concepto de realidad.

Podemos enunciar una relación similar entre las incertidumbres asociadas a las magnitudes tiempo $(t)$ y energía $(E)$ $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$. Esta última expresión será fuertemente cuestionada por Einstein en 1930 mediante un ingenioso experimento mental, con el cual probará que es posible medir con precisión absoluta tanto $t$ como $E$, en contradicción con las restricciones impuesta por el principio de indeterminación, « de ser cierto el experimento de Einstein, supondría el fin de la física»[4] expresó Bohr ¿será tanto así?, lo veremos la próxima semana.

[1] Carta de Einstein a Max Born, fechada el 27 de enero de 1920. *Einstein Born: correspondencia 1916-1955.* Siglo XXI Editores.
[2] Carta de Einstein a Max Born, fechada el 29 de abril de 1924. *Einstein Born: correspondencia 1916-1955.* Siglo XXI Editores.
[3] Carta de Einstein a Max Born, fechada el 4 de diciembre de 1926. *Einstein Born: correspondencia 1916-1955.* Siglo XXI Editores, aunque Einstein repitió esta expresión muchas veces a lo largo de su vida.
[4] Léon Rosenfeld . *Some Concluding Remarks and Reminiscenses en Solvay Institute*, pag. 232 (1968).

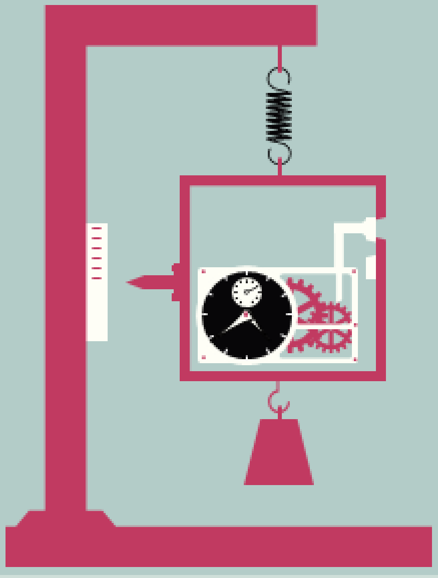

«Uno puede ver el mundo con el ojo p o con el ojo q, pero cuando uno abre ambos ojos a la vez, uno de ellos desaparece*»
-Wolfgang Pauli-
*Mehra y Rechenberg (2000), vol. 6 imagen 1, citado en pág. 147. Carta de Pauli a Heisenberg. 19 de octubre de 1926.

# THE LIGHT BOX



# THE LIGHT BOX

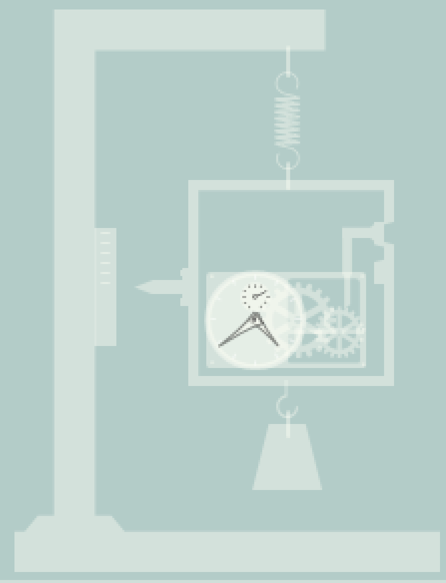
Durante el VI Congreso Solvay de 1930, realizado en Bruselas, Einstein presentó a Bohr un ingenioso experimento mental para mostrar un aparente error en la mecánica cuántica, una violación de la relación de incertidumbre tiempo-energía. «Imagine una caja llena de luz», pidió el físico alemán a su colega danés. En una de sus paredes hay un agujero con un obturador, que puede abrirse y cerrarse a través de un mecanismo conectado a un reloj que hay dentro de la caja, sincronizado con otro que está en el laboratorio. Pese luego la caja. A continuación prepare el reloj para que, en un determinado momento, accione el obturador, durante un breve instante, suficiente para dejar escapar solo un fotón. Ahora sabemos, el momento exacto en el que el fotón abandona la caja, a continuación dijo Einstein con una leve sonrisa, pese Ud. la caja.
Utilizando la relación $E = mc^2$, se podría determinar de manera exacta la energía del fotón.
«Para Bohr se trató casi de un shock», nos cuenta Léon Rosenfeld [1], un testigo privilegiado de la situación y quién a través de sus vividas descripciones nos permite ser partícipes del debate entre dos gigantes de la física.
Parecía, que Einstein había concebido un experimento capaz de medir simultáneamente la energía del fotón y el momento de su emisión, con una exactitud que evadía las restricciones impuestas por el principio de incertidumbre de Heisenberg.
«Esa noche ,cuenta Rosenfeld, Bohr parecía un perro que hubiese acabado de recibir una paliza». Bohr pasó la noche en vela examinando una y otra vez el experimento de la caja de luz, para descubrir dónde se encontraba el error.



[1] Léon Rosenfeld . *Some Concluding Remarks and Reminiscenses en Solvay Institute,* pag. 232 (1968).

# The Light Box

Bohr esbozó una representación del dispositivo experimental capaz de realizar la situación descrita por Einstein. El diseño que acompaña las ilustraciones de esta nota están adaptadas de la caja de luz imaginada por Bohr. En su interior puede apreciarse un temporizador, el cuál se encuentra conectado a un obturador, para permitir la emisión de un fotón. La caja se encuentra soportada por un resorte, una guía calibrada, completa el sistema de pesaje.
Las ideas se sucedían en la mente de un extenuado Bohr, solo a primera hora de la mañana, el danés se dio cuenta súbitamente del error que había cometido Einstein en su experimento mental. Sólo entonces se permitió dormir unas pocas horas, hasta la hora del desayuno, en el cual se encontraría nuevamente con Einstein. Bohr detalló sus argumentos sobre la caja de luz en un trabajo publicado en 1949 [2], a continuación realizaremos un breve resumen de los mismos.



«Si inicialmente, la caja contiene una cierta cantidad de radiación, y el reloj interno es calibrado para abrir durante un tiempo muy corto el obturador, se podría lograr emitir un fotón a través del orificio de la caja en un momento conocido con una presión tan grande como se desee. Por otra parte, aparentemente sería posible también, pesando todo el conjunto antes y después del evento, medir la energía del fotón con absoluta precisión, en contradicción con el principio de indeterminación de las variables tiempo y energía.
Este argumento representó un serio desafío y dio lugar a un examen a fondo de todo el problema. Como resultado de la discusión, se hizo evidente, sin embargo, que este argumento no era válido.[...] Sobre todo, era esencial tener en cuenta la relación entre la velocidad de un reloj y su posición en un campo gravitatorio -el muy conocido desplazamiento hacia el rojo de las líneas del espectro solar- determinada por el principio de equivalencia de Einstein entre los efectos de la gravedad y los fenómenos observados en los sistemas de referencia acelerados.»

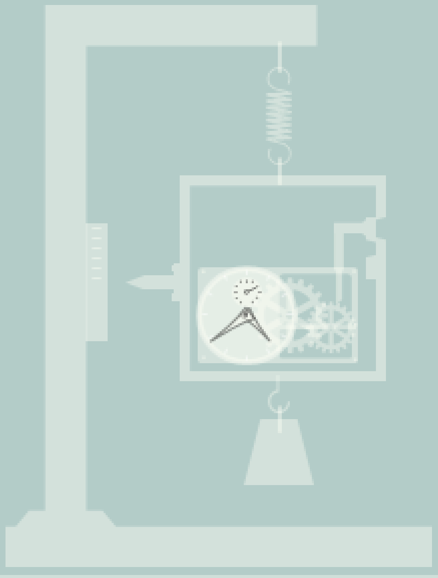


[2] Bohr, N. (1949). *Discussion with Einstein on epistemological problems in atomic physics* (pp. 32-66). University of Copenhagen.

# THE LIGHT BOX

La caja de luz se suspende mediante un dinamómetro, y está equipada con un puntero que permite leer su posición en una escala graduada instalada en el soporte del sistema. De esta manera, el pesaje puede realizarse con una precisión arbitraria $\Delta m$ ajustando la posición del puntero en el valor cero de la escala graduada, mediante el uso contrapesos. La determinación de dicha posición, tiene una incerteza $\Delta q$, que se relaciona con la incerteza del momento $\Delta p$ de la caja a través del principio de indeterminación. Dicha indeterminación es mucho menor que el cambio de momento producido durante el intervalo de apertura del obturador $T$, producido por un campo gravitatorio en un cuerpo con masa $\Delta m$, es decir:

$$\Delta p \approx \frac{h}{\Delta q} < Tg\Delta m \qquad (1)$$



Donde $g$ es la constante gravitatoria.
Ahora, de acuerdo con la teoría general de la relatividad, un reloj que se desplaza en la dirección de una fuerza gravitatoria un intervalo $\Delta q$, en un intervalo de tiempo $T$, presentará una indeterminación en el tiempo de apertura del obturador $\Delta T$

$$\Delta T = T\frac{g\Delta q}{c^2} \qquad (2)$$

Combinando las expresiones **(1)** y **(2)**, obtenemos:

$$\Delta T > \frac{h}{c^2\Delta m} \qquad (3)$$

Equivalente a expresar,

$$\Delta T\Delta E > h \qquad (4)$$

en concordancia con el principio de indeterminación.
En resumen, en su embestida contra la interpretación de Copenhague, Einstein había olvidado su propia teoría!!!, sin embargo la historia no termina aquí, la semana que viene un nuevo capítulo.

“No existe un mundo cuántico. Lo único que existe es una descripción mecánico-cuántica abstracta*”

N. Bohr

“Todavía creo en la posibilidad de un modelo de la realidad, es decir, de una teoría que represente las cosas en sí mismas y no tan sólo la probabilidad de su ocurrencia**”

A. Einstein

*Petersen, Aage. «The Philosophy of Niels Bohr». 1985

**Einstein Albert, «Autobiographical Notes». 1949

¿Qué diría
de la siguiente situación?,
supongamos dos partículas que se ponen
en movimiento la una hacia la otra
con el mismo, muy grande, momento y que
interactúan entre sí durante un tiempo muy
corto cuando pasan por posiciones conocidas.
Consideramos ahora a un observador que
«agarra» una de esas partículas, muy lejos de la región de
interacción, y mide su momento;
por las condiciones del experimento, podrá
evidentemente deducir el momento de la otra partícula.
Si, sin embargo, elige medir la posición de la primera
partícula, será capaz de decir dónde está la otra partícula.
Ésta es una deducción perfectamente correcta
y simple a partir de los principios de la mecánica
cuántica, ¿pero no resulta paradójica?
¿Cómo puede el estado final de la segunda
partícula verse influido por una medida
llevada a cabo en la primera después de que haya
cesado toda interacción física entre ellas?*

Conversación entre A.Einstein y L. Rosenfeld durante el congreso de Solvay de 1933.
Dos años después, Einstein formalizaría el planteo sobre la mecánica cuántica en el famoso artículo EPR.

*John A.Wheeler, Wojciech H. Zurek. Quantum Theory and Measurement (Princeton Legacy Library), pag 137.1983

# ¿Puede considerarse completa la descripción mecano-cuántica de la realidad física?

**E**instein **P**odolsky **R**osen

A comienzo de 1935 Albert Einstein, Boris Podolsky y Nathan Rosen comenzaron a trabajar en un nuevo experimento mental ideado por Einstein con la intención de demostrar la incompletitud de la mecánica cuántica. Podolsky asumió la tarea de redactar el artículo, mientras que Rosen se encargó de realizar los cálculos matemáticos. El artículo, conocido posteriormente como EPR, se publicó en la revista *Physical Review* [1] el 15 de mayo de 1935, con el provocador título «¿Puede considerarse completa la descripción mecano-cuántica de la realidad física?», la respuesta presentada por los EPR era un rotundo NO!!

En la introducción del artículo podemos leer:

«En una teoría completa hay un elemento correspondiente a cada elemento de realidad.

Una condición suficiente para la realidad de una magnitud física es la posibilidad de predecirla con certeza sin perturbar el sistema. En mecánica cuántica, en el caso de dos magnitudes física descritas por operadores que no conmutan, el conocimiento de una de ellas impide el conocimiento de la otra.

Entonces o bien (1) la descripción de la realidad dada por la función de onda en mecánica cuántica no es completa, o bien (2) estas dos magnitudes no pueden tener realidad simultáneamente.

Una consideración del problema de hacer predicciones concernientes a un sistema basadas en medidas realizadas sobre otro sistema que hubiera interaccionado previamente con el primero

lleva al resultado de que si (1) es falsa, entonces (2) es también falsa. Uno se ve así llevado a concluir que la descripción de la realidad dada por la función de onda no es completa.»

[1] Einstein, A.; Podolsky, B.; Rosen, N. «Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?». Physical Review 47: 777-780. (1935).

La idea central del trabajo de Einstein, Podolsky y Rosen es mostrar que dos observables conjugados de una partícula en un estado entrelazado podrían corresponder a la misma realidad física. De esta manera, y de acuerdo con lo enunciado en la introducción del trabajo, si la condición (2) es falsa por lo tanto la condición (1) es verdadera y por lo tanto la mecánica cuántica es incompleta.
Serían necesarios más de 50 años de desarrollo teórico y experimental, para entender los conceptos de realidad y localidad.
Antes de comenzar a analizar el trabajo de los EPR, es necesario explicitar tres definiciones importantes utilizadas en el trabajo:

***Teoría completa***
«Para que una teoría sea completa, es necesario el siguiente requisito: todo elemento de la realidad física debe tener una contrapartida en la teoría física.»

***Realidad física***
«Si, sin perturbar el sistema en modo alguno, podemos con certeza (esto es, con probabilidad igual a la unidad) el valor de una magnitud física, entonces existe un elemento de realidad física correspondiente a dicha magnitud física.»

***Principio de localidad (implícito)***
«Por otra parte, puesto que en el instante de la medida los dos sistemas ya no interaccionan, ningún cambio real puede tener lugar en el segundo sistema consecuencia de algo que pueda hacerse al primer sistema. Este es por supuesto, simplemente un enunciado de lo que se entiende por ausencia de una interacción entre dos sistemas.»

Se considera un estado $\Psi$ de dos partículas y se expresa en las representaciones asociadas a dos observables conjugados $A_1$ y $B_1$ de la partícula 1.
Supongamos que los observables tienen el siguiente conjunto de autofunciones y autovalores:

$$A_1 u_i(x_1) = a_i u_i(x_1)$$

$$B_1 v_i(x_1) = b_i v_i(x_1)$$

Se puede expresar el estado de dos partículas $\Psi$ utilizando las autofunciones del observable $A_1$

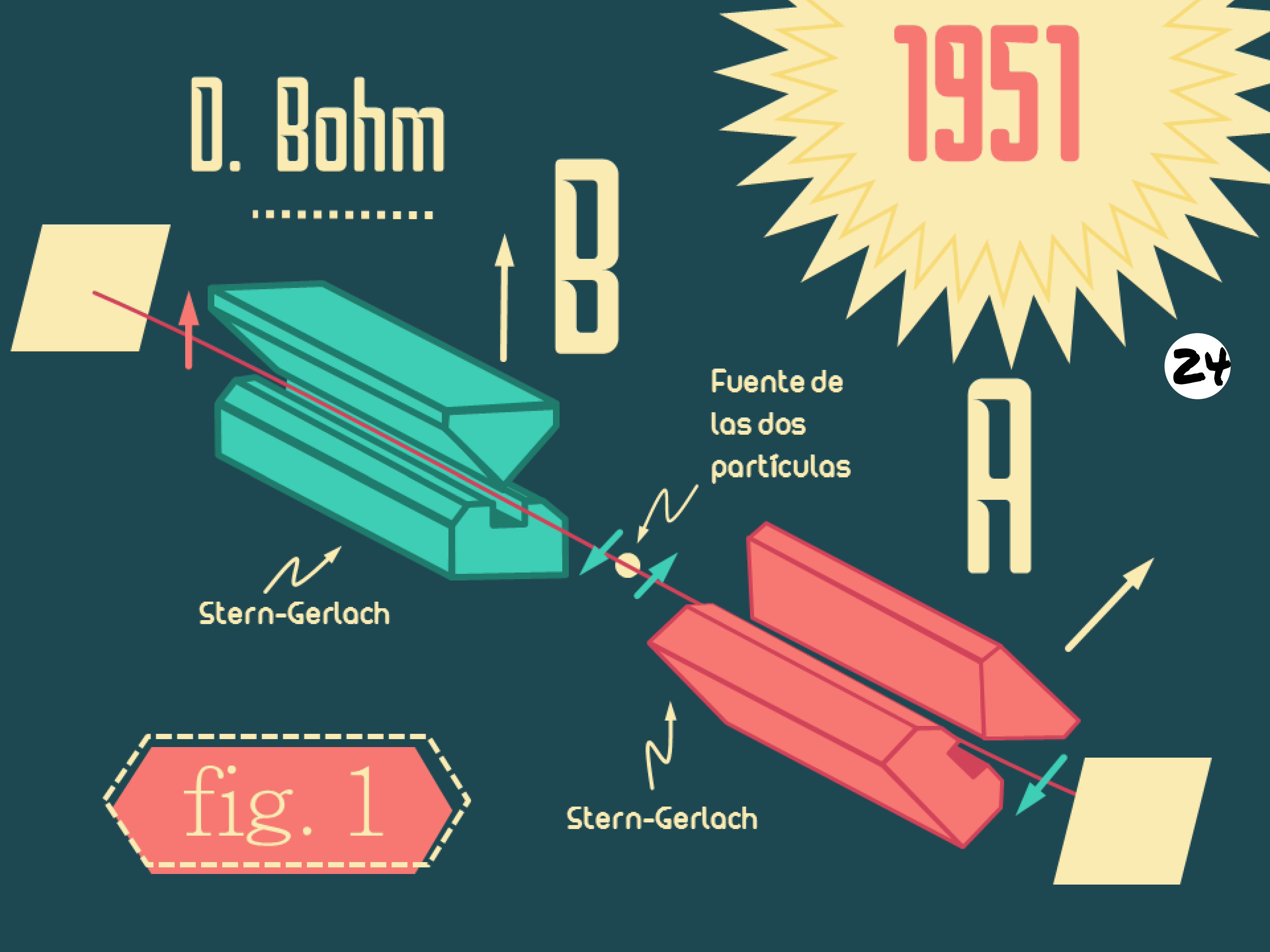
$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1)$$

De igual forma, utilizando las autofunciones del operador $B_1$

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_2) v_n(x_1)$$

Aunque hemos mostrado así que la función de onda no proporciona una descripción completa de la realidad, dejamos abierta la cuestión de que si existe o no semejante descripción. No obstante, creemos que una teoría semejante sí es posible*.

*epílogo del artículo EPR, luego su publicación Dirac expresó: «Ahora tenemos que comenzarlo todo de nuevo, porque Einstein ha demostrado que no funciona», ¿será tanto así?, lo veremos la próxima semana.


1951
D. Bohm
B
A
24
Fuente de
las dos
partículas
Stern-Gerlach
Stern-Gerlach
fig. 1

En 1951 David Bohm [1] propone una versión simplificada de la paradoja EPR, basada en medidas de las componentes de espín de dos partículas de espín ½. Los observables relevantes son binarios, lo cual reduce el planteo EPR a lo esencial. Tanto el teorema de Bell, como la mayoría de los experimentos realizados utilizan la polarización de un par de fotones, un grado de libertad binario con características similares a las componentes de espín de una partícula de espín ½.
Bohm considera un par de partículas que se alejan entre sí , como en la figura que ilustra este posteo. Las partículas tienen espines opuestos de forma que el espín total es nulo. A cierta distancia de la fuente, se encuentran dos observadores **A** y **B**, equipados con sendos dispositivos de Stern-Gerlach que les permite analizar el signo de una componente del espín. EL analizador **A** puede rotar, 90º lo que le permite medir en dos direcciones ortogonales (*z* ó *x*). El analizador **B** es fijo y sólo mide en la dirección *z*. Las partículas se encuentran en un estado singlete máximamente enredado.

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|+,-\rangle_{zz} - |-,+\rangle_{zz}] \qquad \textbf{(1)}$$

Cuando el operador **A** realiza una medida de espín, puede elegir dos direcciones *z* ó *x*. Un instante después el operador **B** puede medir la componente *z* de espín de la partícula 2. Si **A** elige medir $S_{1z}$ y obtiene $+1$, el singlete se reduce a

$$|\Psi\rangle \longrightarrow |+,-\rangle_{zz} \qquad \textbf{(2)}$$

El enredo se ha perdido y ambas componentes de espín tiene valores bien definidos. En particular si **B** mide $S_{2z}$ obtendrá -1 con certeza y sin afectar al sistema. Por lo tanto $S_{2z}$ tiene realidad física para **B**.

[1] D. Bohm. Quantum Theory. Prentice Hall, New York, 1951

Supongamos ahora que, dado el mismo estado $|\Psi\rangle$ el operador **A**, elige medir la componente $S_{1x}$, en este caso podemos expresar la función de onda $|\Psi\rangle$, en términos de los autoestados de $S_{1x}$,

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\left[|+\rangle_x \otimes (|-\rangle_z - |+\rangle_z) + |-\rangle_x \otimes (|+\rangle_z + |-\rangle_z)\right] \qquad \textbf{(3)}$$

Supongamos que **A** obtiene -1, entonces el estado conjunto se reduce a

$$|\Psi\rangle \longrightarrow |-\rangle_x \otimes \frac{(|-\rangle_z + |+\rangle_z)}{\sqrt{2}} = |-,+\rangle_{xx} \qquad \textbf{(4)}$$

En este caso la partícula 2 tiene un valor bien definido de su componente $S_{2x}$, pero no de $S_{2z}$. Si **B** mide la componente de espín en la dirección z $S_{2z}$, obtendrá $\pm 1$ con igual probabilidad.
La «paradoja» tiene lugar si recordamos los criterios desarrollados en el artículo EPR, *elemento de la realidad, teoría completa y localidad*. La realidad física de **B** está siendo afectada instantáneamente por la decisión de **A** de como orienta su aparato de medición, lo cual sugiere abandonar la localidad. La otra posibilidad, planteada por EPR es que el estado $|\Psi\rangle$ no sea una descripción completa de la realidad. En este caso, ambas componentes $S_{2x}$ y $S_{2z}$ estarían bien definidas en la realidad física de **B** (que no cambia), pero no en el estado $|\Psi\rangle$. En el debate que siguió a estos planteos, esta posición se conoció como Realista y Local.

El filósofo corriente, que no ha padecido un curso de mecánica cuántica, se muestra poco impresionado por las correlaciones de Einstein-Podolsky-Rosen.

Puede señalar muchos ejemplos de correlaciones similares en la vida cotidiana. El caso de los calcetines de Bertlmann es citado con frecuencia.

Al doctor Bertlmann le gusta llevar un calcetín de cada color. Qué color llevará en un pie dado un día dado es impredecible. Pero cuando Ud. ve que el primer calcetín es rosa puede estar ya seguro que el segundo no lo será. La observación del primero, junto a la experiencia sobre Bertlmann, da inmediatamente información acerca del segundo. No hay ninguna explicación de gustos, pero aparte de eso no existe aquí misterio alguno. ¿Y no es el asunto EPR justamente lo mismo?*

*J. S. Bell
Bertlmann´s socks and the nature of reality.
Journal de Physique, Colloque C2,
suppl. 42-pp. 41-61. (1981).


L.S.V.P.
|P(a,b) − P(a,b′)| + |P(a′,b) + P(a′,b′)|
≤ 2. Einst
= 2√2 QM
a
a′
b
b′
10⁻⁹ sec

«La paradoja de Einstein Podolsky, Rosen, se propuso como un argumento de que la mecánica cuántica no podía ser una teoría completa, sino que debía ser suplida con variables adicionales. Estas variables adicionales restaurarían la causalidad y localidad en la teoría. En esta nota se formulará matemáticamente esa ida y se mostrará que es incompatible con las predicciones estadísticas de la mecánica cuántica. Es el requisito de localidad, o más precisamente el que el resultado de una medida sobre un sistema no se vea afectado por operaciones sobre un sistema distante con el cual haya interactuado en el pasado, lo que crea la dificultad esencial.*»

*J. S.Bell
On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physics* **1-195.** (1965).


J.S. BELL
$1 + P(b,c) \geq |P(a,b) - P(a,c)|$

En 1964, John Bell decide tomarse un año sabático de su trabajo como diseñador de aceleradores de partículas en el CERN, se traslada a la Universidad de Stanford donde da forma a su famoso teorema, el cual se publica en la revista *Physics*, «On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. Physics **1**(1964) 195-200».

La importancia del trabajo de Bell, radica en colocar por primera vez la disyuntiva filosófica planteada por la paradoja EPR en términos cuantitativos susceptibles de verificación experimental.

En la introducción del artículo, podemos leer:

«Con el ejemplo propugnado por Bohm y Aharonov, la argumentación de EPR es como sigue. Considérese un par de partículas de espín ½ creadas de algún modo en el estado singlete de espín y que se mueven libremente según direcciones opuestas. Pueden hacerse medidas, por ejemplo mediante imanes Stern-Gerlach, de proyecciones escogidas de los espines $\boldsymbol{\sigma_1}$ y $\boldsymbol{\sigma_2}$ . Si midiendo la proyección $\boldsymbol{\sigma_1}.\boldsymbol{a}$, donde $\boldsymbol{a}$ es algún vector unitario, se obtiene el valor +1, entonces, según la mecánica cuántica, la medida de $\boldsymbol{\sigma_2}.\boldsymbol{a}$ debe arrojar el valor -1 y viceversa. Ahora hacemos la hipótesis , y ésta parece al menos digna de ser considerada, que si se llevan a cabo dos medidas en lugares muy distantes, entre sí, la orientación de un imán no afecta el resultado obtenido con el otro. Puesto que podemos predecir el resultado de la medida de cualquier componente de $\boldsymbol{\sigma_2}$, se sigue que el resultado de tal medida ha de estar realmente predeterminado.

Como la función de onda cuántica inicial no determina el resultado de una medida individual, esta predeterminación implica la posibilidad de una especificación del estado más completa. Sean $\lambda$ los parámetros que efectúan la mencionada especificación. Resulta indiferente para la que sigue que $\lambda$ denote una sola variable o un conjunto, o incluso un conjunto de funciones, y que las variables sean discretas o continuas. No obstante, escribimos $\lambda$ como si fuera un solo parámetro continuo. El resultado A de medir $\boldsymbol{\sigma_1}.\boldsymbol{a}$ viene entonces determinado por $\boldsymbol{a}$ y $\lambda$ y el resultado B de medir $\boldsymbol{\sigma_2}.\boldsymbol{b}$ en la misma ocasión viene determinado por $\boldsymbol{b}$ y $\lambda$ y

$$A(\boldsymbol{a},\lambda) = \pm 1, B(\boldsymbol{b},\lambda) = \pm 1$$

La hipótesis esencial es que el valor B para la partícula 2 no depende del dispositivo **a**, del imán para la partícula 1, ni el A del **b**. Si $\varrho(\lambda)$ es la distribución de probabilidad de $\lambda$, entonces los valores esperados del producto de los componentes $\boldsymbol{\sigma_1}.\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{\sigma_2}.\boldsymbol{b}$ es

$$P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \int d\lambda \varrho(\lambda) A(\boldsymbol{a},\lambda) B(\boldsymbol{b},\lambda)$$

Esto debe ser igual al valor esperado cuántico, que para el estado singlete es

$$\langle \boldsymbol{\sigma_1}.\boldsymbol{a} \boldsymbol{\sigma_2}.\boldsymbol{b} \rangle = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}$$

Pero demostraremos que esto no es posible.

En una teoría física completa del tipo previsto por Einstein, las variables ocultas tendrían significado físico y leyes de movimiento; en ese caso nuestras $\lambda$ pueden imaginarse como los valores iniciales de dichas variables en algún instante apropiado. »

## Demostración

El valor esperado del producto de los componentes $\boldsymbol{\sigma_1}.\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{\sigma_2}.\boldsymbol{b}$ es:

$$P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \int d\lambda\varrho(\lambda)A(\boldsymbol{a},\lambda)B(\boldsymbol{b},\lambda)$$

donde $\varrho(\lambda)$ es la distribución de probabilidad de $\lambda$, que cumple con la condición de normalización:

$$\int \varrho(\lambda)d\lambda = 1$$

Calculemos ahora, la relación entre las proyecciones en las direcciones **a**, **b** y **c**, en particular, nos interesa la diferencia entre ambas correlaciones:

$$P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - \mathrm{P}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) = \int d\lambda\varrho(\lambda)A(\boldsymbol{a},\lambda)B(\boldsymbol{b},\lambda) -$$

$$\int d\lambda\varrho(\lambda)A(\boldsymbol{a},\lambda)B(\boldsymbol{c},\lambda)$$

y usando $B^2(\boldsymbol{b},\lambda) = 1$, podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - \mathrm{P}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) = \int A(\boldsymbol{a},\lambda)B(\boldsymbol{b},\lambda)\,[1 - B(\boldsymbol{b},\lambda)B(\boldsymbol{c},\lambda)]\varrho(\lambda)d\lambda$$

luego, tomando valor absoluto, y utilizando la desigualdad del triangulo, obtenemos:

$$|P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - \mathrm{P}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})| \leq \int |A(\boldsymbol{a},\lambda)B(\boldsymbol{b},\lambda)||1 - B(\boldsymbol{b},\lambda)B(\boldsymbol{c},\lambda)|\,\varrho(\lambda)d\lambda$$

y como A y B valen $\pm1$, la ecuación anterior se reduce a la expresión:

$$|P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - \mathrm{P}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})| \leq 1 - \int B(\boldsymbol{b},\lambda)B(\boldsymbol{c},\lambda)\,\varrho(\lambda)d\lambda$$

Utilizando $B(\boldsymbol{b},\lambda) = -A(\boldsymbol{b},\lambda)$, obtenemos:

$$|P(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - \mathrm{P}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})| \leq 1 + P(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$$

Es decir, **EL TEOREMA DE BELL!!**
La ecuación anterior establece una desigualdad que verifica toda teoría local de variables ocultas, como veremos a continuación, la mecánica cuántica viola dicha desigualad.

## Predicción cuántica

Ahora, mostraremos que la mecánica cuántica viola el teorema de Bell.
El valor esperado asociado a la medición simultánea de las componentes de espín en las direcciones, a, b, se calcula como:

$$P_{MC}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = -\mathbf{a}.\,\mathbf{b} = -\cos(\theta_{ab})$$

la correlación cuántica depende sólo de la orientación relativa $\theta_{ab} = |\theta_a - \theta_b|$, de ambos analizadores. Eligiendo por ejemplo tres orientaciones a,b y c coplanares formando un ángulo de $60^0$ entre sí, se obtiene:

$$|P_{MC}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - P_{MC}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})| - P_{MC}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \frac{3}{2} > 1$$

es decir, la mecánica cuántica viola el Teorema de Bell.

«Ninguna teoría determinista y local puede reproducir todos los resultados de la mecánica cuántica.»

J. S. Bell

# 1971

J. S. Bell

En 1971, John Bell, extendió el análisis original, teniendo en cuenta que el estado de los aparatos de medición podría influenciar las correlaciones, dicho estado se incluye entonces en la descripción por variables ocultas. De esta manera, se obtiene una segunda desigualdad, la cual permite una comprobación experimental. El trabajo de Bell, se publicó bajo el título «Introducción a la cuestión de las variables ocultas», [Introduction to the hidden-variable question. *Foundation of Quantum Mechanics. Proceedings of the International School of Physiscs «Enrico Fermi»*, course IL, pp. 171-81]. La introducción de dicho artículo resulta tan interesante sobre el problema de las variables ocultas, que la reproduciremos completa.

**«Los físicos teóricos viven en un mundo clásico, investigando un mundo cuántico.**

Describimos este último sólo de modo subjetivo, en términos de métodos y resultados de nuestro dominio clásico.
Esta descripción subjetiva se lleva a cabo mediante las funciones de estado cuánticas, $\psi$, que caracterizan el condicionamiento clásico de los sistemas cuánticos y permiten realizar predicciones acerca de sucesos subsiguientes a dicho nivel clásico.
Por supuesto, el mundo clásico se describe de un modo totalmente discreto: «como es». Podríamos, por ejemplo, especificar las posiciones reales

$\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$ de cuerpos materiales, tales como las llaves de conmutación que definen las condiciones experimentales y las agujas, o el papel impreso, que definen los correspondientes resultados. En consecuencia, en la teoría actual la descripción más completa del estado del mundo en su totalidad, o de una parte de él que se prolonga hasta nuestro dominio clásico, es de la forma: $(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \psi)$ con, a la vez, variables clásicas y una o más funciones cuánticas.
Ahora bien, nadie sabe con exactitud dónde se sitúa la frontera entre el dominio clásico y el cuántico. La mayoría piensa que los dispositivos experimentales caen de este (clásico) lado. Pero algunos colocarían la frontera más cerca, otros más lejos, y muchos preferirían no pensar en ello.
De hecho, este asunto tiene poca importancia en la práctica. Esto se debe a la inmensa diferencia de escala entre las cosas para las que la descripción cuántica es esencial desde el punto de vista numérico y aquellas comúnmente perceptibles por los seres humanos. Sin embargo, la movilidad de la frontera tiene sólo una validez aproximada; las demostraciones de ello se basan en despreciar números que son pequeños, pero no cero, los cuales podrían tender a cero para sistemas infinitamente grandes, pero que para sistemas finitos reales son únicamente muy pequeños. Una teoría fundamentada de este modo en argumentos de carácter manifiestamente aproximado, aunque la aproximación sea buena, tiene ciertamente visos de provisionalidad. Parece legítimo especular acerca de cómo podría evolucionar la teoría.
Pero, por supuesto, nadie está obligado a adherirse a tales especulaciones.

Una posibilidad es que encontremos con exactitud dónde se coloca la frontera. Para mí resulta más plausible que hallemos que no existe tal frontera. Me resulta difícil imaginar un discurso inteligible cerca de un mundo sin parte clásica alguna; sin ninguna base para correlacionar sucesos dados, estos se convierten en acontecimientos mentales en una coincidencia individual. Por otro lado, es fácil imaginar que el domino clásico podría extenderse a la totalidad. La función de onda resultaría ser una descripción provisional o incompleta de la parte cuántica, de la cual sería posible una descripción objetiva. Es esta eventualidad, la de una descripción homogénea del mundo, la que constituye para mí la motivación principal del estudio de la posibilidad de las llamadas «variable ocultas».

Una segunda motivación está conectada al carácter estadístico de las predicciones cuánticas. Una que vez se sospecha que la descripción mediante la función de ondas es incompleta; puede conjeturarse que la aparentemente aleatoria fluctuaciones estadísticas están determinadas por las «variables ocultas» extras; «ocultas» porque es este estadio sólo podemos conjeturar su existencia y ciertamente no podemos controlarlas. Análogamente, la descripción del movimiento browniano, por ejemplo, podría haber sido desarrollada en principio de un modo puramente estadístico, haciéndose la estadística inteligible más tarde con la hipótesis de la constitución molecular de los fluidos; esta hipótesis habría entonces señalado posibilidades experimentales no imaginadas previamente cuyo desarrollo lo haría convincente del todo.

Esta posibilidad de determinismo resulta para mí menos motivadora que la de tener un único mundo en lugar de dos. Pero al requerirla, el programa se torna mejor definido y más tangible.

Una tercera motivación reside en el carácter peculiar de algunas predicciones de la mecánica cuántica, que parecen estar clamando por una interpretación de variables ocultas. Este es el famoso argumento de Einstein, Podolsky y Rosen. Considérese el ejemplo, debido a Bohm, de un par de partículas, de espín ½ producidas de algún modo en el estado singlete de espín y que después se mueven libremente según direcciones opuestas. Mediante, por ejemplo, imanes de Stern-Gerlach, pueden llevarse a cabo medidas de proyecciones escogidas de los espines, $\boldsymbol{\sigma}_1$ y $\boldsymbol{\sigma}_2$. Si la medida de $\boldsymbol{\sigma}_1 . \boldsymbol{a}$ donde $\boldsymbol{a}$ es algún vector unitario, arroja el valor +1, entonces, según la mecánica cuántica, la medida de $\boldsymbol{\sigma}_2 . \boldsymbol{a}$ debe de dar el valor -1 y viceversa. Así, pues podemos adelantar el resultado de medir una componente de $\boldsymbol{\sigma}_2$ midiendo previa, y posiblemente en un lugar muy distante, la componente correspondiente de $\boldsymbol{\sigma}_1$. Esto sugiere con fuerza que los resultados de tales medidas, según direcciones arbitrarias, están de hecho determinadas previamente, por variables sobre las que no tenemos control, pero que se revelan suficientemente en el primer experimento de modo que podemos anticipar el resultado del segundo. No existe entonces la tentación de considerar que la realización de una medida tiene una influencia causal sobre el resultado de la otra, distante medida.

La descripción de la situación podría ser manifiestamente «local». Esta idea parece al menos merecer una investigación.

Encontraremos, de hecho, que **ninguna teoría de variables ocultas local y determinista puede reproducir todas las predicciones experimentales de la mecánica cuántica**. Esto abre la posibilidad de llevar la cuestión al dominio experimental, tratando de aproximarse lo mejor posible a las situaciones idealizadas, en las que las variables ocultas locales y la mecánica cuántica no puedan estar de acuerdo.»

# Segunda desigualdad de Bell

El esquema general de la demostración es muy similar a la primera desigualdad de Bell, basada en la descripción de la medida del espín de dos partículas. En este caso el estado de los aparatos de medida se incluyen en la descripción del sistema por variables ocultas. De esta manera las correlaciones ya no son perfectas como en la deducción original, en este caso las observaciones son promediadas en los grados de libertad (ocultos) de los instrumentos.

Considérese por ejemplo de nuevo el sistema de dos partículas de espín ½. Supóngase que éstas se han preparado de algún modo en un estado tal que pueden moverse en direcciones diferentes hacia dos instrumentos de medida y que estos últimos miden componentes de espín según las direcciones $\hat{a},\hat{b}$ respectivamente. Supóngase además que la hipotética descripción completa del estado inicial se realiza en términos de variables ocultas $\lambda$ con distribución de probabilidad $\varrho(\lambda)$ para el estado cuántico dado. El resultado $A(=\pm 1)$ de la primera medida puede depender claramente de $\lambda$ y de la disposición $\hat{a}$ del primer instrumento.

Análogamente, $B$ puede depender de $\lambda$ y de $\hat{b}$. Pero nuestra noción de localidad requiere que $A$ no dependa de $\hat{b}$, ni $B$ de $\hat{a}$. Nos preguntamos entonces si el valor medio $P\left(\hat{a},\hat{b}\right)$ del producto $AB$, esto es:

$$P\left(\hat{a},\hat{b}\right)=\int d\lambda\varrho(\lambda)A(\hat{a},\lambda)B\left(\hat{b},\lambda\right)$$

Puede ser igual que la predicción de la mecánica cuántica.
De hecho podemos y debemos ser algo más generales. Los propios instrumentos podrían contener variables ocultas que podrían influir sobre los resultados. Si primero promediamos sobre los instrumento, obtenemos la representación

$$P\left(\hat{a},\hat{b}\right)=\int d\lambda\varrho(\lambda)\bar{A}(\hat{a},\lambda)\bar{B}\left(\hat{b},\lambda\right)$$

Donde los promedios $A$ y $B$ serán independientes de $\hat{b}$ y $\hat{a}$ respectivamente. En lugar de

$$A=\pm 1,\qquad B=\pm 1$$

Ahora tenemos

$$|\bar{A}|\leq 1,\qquad |\bar{B}|\leq 1$$

Y esto basta para deducir una interesante restricción sobre $P$.
Sean $\hat{\hat{a}}$ y $\hat{\hat{b}}$ dos disposiciones alternativas de los instrumentos.
En este caso

$$P\left(\hat{a},\hat{b}\right)-P\left(\hat{\hat{a}},\hat{\hat{b}}\right)$$

$$=\int d\lambda\varrho(\lambda)\left[\bar{A}(\hat{a},\lambda)\bar{B}\left(\hat{b},\lambda\right)-\bar{A}(\hat{a},\lambda)\bar{B}\left(\hat{b},\lambda\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&P(\hat{a},\hat{b}) - P\left(\hat{a},\hat{\hat{b}}\right) \\
&\qquad = \int d\lambda\varrho(\lambda)\left[\bar{A}(\hat{a},\lambda)\bar{B}(\hat{b},\lambda) - \bar{A}(\hat{a},\lambda)\bar{B}\left(\hat{\hat{b}},\lambda\right)\right] \\
&\qquad = \int d\lambda\varrho(\lambda)\left[\bar{A}(\hat{a},\lambda)\bar{B}(\hat{b},\lambda)\left(1\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\pm \bar{A}(\hat{\hat{a}},\lambda)\bar{B}\left(\hat{\hat{b}},\lambda\right)\right)\right] \\
&\qquad - \int d\lambda\varrho(\lambda)\left[\bar{A}(\hat{a},\lambda)\bar{B}\left(\hat{\hat{b}},\lambda\right)\left(1\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\pm \bar{A}(\hat{a},\lambda)\bar{B}(\hat{b},\lambda)\right)\right]
\end{aligned}
$$

Ahora, utilizando, las condiciones $|\bar{A}| \leq 1$ y $|\bar{B}| \leq 1$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&\left|P(\hat{a},\hat{b}) - P\left(\hat{a},\hat{\hat{b}}\right)\right| \\
&\qquad \leq \int d\lambda\varrho(\lambda)\left(1\right. \\
&\qquad \left.\pm \bar{A}(\hat{\hat{a}},\lambda)\bar{B}\left(\hat{\hat{b}},\lambda\right)\right) + \int d\lambda\varrho(\lambda)\left(1\right. \\
&\qquad \left.\pm \bar{A}(\hat{\hat{a}},\lambda)\bar{B}\left(\hat{\hat{b}},\lambda\right)\right)
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$
\left|P(\hat{a},\hat{b}) - P\left(\hat{a},\hat{\hat{b}}\right)\right| + \left|P\left(\hat{\hat{a}},\hat{\hat{b}}\right) - P(\hat{\hat{a}},\hat{b})\right| \leq 2
$$

Con $\hat{a} = \hat{b}$ y suponiendo $P\left(\hat{b}, \hat{b}\right) = -1$, la ecuación anterior se reduce a la forma original de la desigualdad de Bell.
Si comparamos el resultado anterior con el valor predicho por la mecánica cuántica, esto es:

$$P(a, b) = -\hat{a}.\hat{b}$$

observamos que las correlaciones cuánticas violan la desigualdad de Bell.

«Este resultado abre la posibilidad de llevar las cuestiones que hemos estado considerando al área experimental.»

J. S. Bell


MEDIAS

Uno de los primeros posteos realizados este cuatrimestre fue un lavarropas con medias. La idea respondía a un trabajo de divulgación desarrollado por J.S. Bell, donde utilizaba como elementos para deducir su famosa desigualdad un par de calcetines. El trabajo se titula, Los calcetines de Bertlmann y la naturaleza de la realidad, publicado en 1981. [Bertlmann´s socks and the nature of reality. Journal de Physique, Colloque C2, suppl. 42-C2 41.]

Bell ilustra la paradoja EPR, con una particularidad del Dr. Bertlmann, la de llevar calcetines de diferentes colores.

«Que color llevará en un pie dado un día dado es impredecible. Pero cuando Ud. ve que el primer calcetín es rosa puede estar ya seguro que el segundo no lo será. La observación del primero, junto a la experiencia sobre Bertlmann, da inmediatamente información acerca del segundo. No hay ninguna explicación de gustos, pero eso aparte no existe misterio alguno. ¿Y no es el asunto EPR justamente lo mismo?». El artículo continúa extendiendo la analogía entre partículas y calcetines, desarrollando la desigualdad de Bell, en función de las condiciones de lavado de un par de calcetines. De esta manera, lo que primeramente es un test sobre la temperatura de lavado que pueden soportar los calcetines ($0^0$C, $45^0$C, $90^0$C), se transforma posteriormente en los ángulos de inclinación de los detectores tipo Stern-Gerlach para partículas entrelazadas a lo Bertlmann, es decir si una pasa el test, la otra no.


Una de las cuestiones más importantes con respecto a un calcetín es «¿ se podrá lavar». Una organización de estudio del consumo lo podría formular con más precisión: ¿Podría el calcetín aguantar mil ciclos de lavado a $45^0$ C? ¿O a $90^0$ C? ¿O a $0^0$ C?. Entonces puede aplicarse una adaptación de la desigualdad de Wigner-d´Espagnat*. Para un conjunto de calcetines nuevos tenemos:


Esto es trivial, pues cada miembro del tercer grupo podría sobrevivir a $45^0$ y entonces pertenecer al segundo grupo, o no podría hacerlo y entonces está también en el primero.

*«El número de mujeres de menos de cuarenta años… es inferior o igual al de mujeres fumadoras… más el de no fumadoras de menos de cuarenta años»
B. D´Espagnat, En busca de lo real, ALIANZA universidad (1983).

Pero trivialidades como esa, exclamará Ud., no son de interés en la investigación del consumo. Tiene razón; estamos forzando un poco la analogía entre investigación de consumo y filosofía cuántica. Además, insistirá Ud., la afirmación no tiene ningún contenido empírico. No hay modo de decidir si un calcetín dado podría sobrevivir el primer test, no estaría disponible para el segundo, y aunque lo hiciera ya no sería nuevo y los test posteriores no serían igual de significativos que el original. Supóngase, sin embargo que los calcetines van de a pares. Y que sabemos por experiencia que entre los miembros de un par la diferencia es pequeña, en el sentido de que si uno de ellos pasa un test dado el otro también lo pasa *si* se lleva a cabo. Entonces de la desigualdad de d´Espagnat podemos inferir que:

Esto no es aún verificable empíricamente, pues aunque los dos tests de cada paréntesis se realizan ahora sobre calcetines distintos, los diferentes paréntesis involucran distintos tests sobre el mismo calcetín. Pero ahora añadimos la hipótesis de las muestras aleatorias: si la muestra de pares es lo bastante extensa y escogemos al azar una submuestra de tamaño suficiente para sufrir un par de tests dado, las fracciones pasa/falla de la submuestra pueden extenderse a la muestra completa con alta probabilidad. Identificando tales fracciones con *probabilidades* de un modo del todo convencional, tenemos ahora:

Además esto tiene sentido empíricamente en tanto en cuanto las probabilidades puedan determinarse por muestreo aleatorio.

Hemos formulado primero estas consideraciones para pares de calcetines, moviéndonos con una confianza  considerable en esos familiares objetos. Pero, ¿por qué no razonar de manera análoga para los pares de partículas del experimento EPRB? Mediante un bloqueo de los canales «down» en los imanes Stern-Gerlach, que permita el paso de partículas «up» (desviadas hacia arriba), sometemos efectivamente las partículas a tests que pasan o no. En lugar de temperatura ahora tenemos ángulos $a$ y $b$ a los que se preparan los imanes Stern-Gerlach. La diferencia esencial, trivial es que las partículas están apareadas a  la Bertlmann, si una pasara un test dado la otra lo fallaría con seguridad.

Para tener esto en cuenta tomemos simplemente el reciproco del segundo término en cada paréntesis:

$$(la\ probabilidad\ de\ que\ una\ partícula\ pase\ a\ 0^0\ y\ la\ otra\ a\ 45^0)$$
$$+$$
$$(la\ probabilidad\ de\ que\ una\ partícula\ pase\ a\ 45^0\ y\ la\ otra\ a\ 90^0)$$
$$\geq$$
$$(la\ probabilidad\ de\ que\ una\ partícula\ pase\ a\ 0^0\ y\ la\ otra\ a\ 90^0)$$

No sea caso que alguien encuentre el rodeo por los calcetines un poco largo, miremos directamente este resultado final para ver lo trivial que es. Estamos suponiendo que las partículas poseen propiedades que dictan su capacidad para pasar ciertos tests, se hagan o no éstos. Para dar cuenta de la perfecta anticorrelación cuando se aplican idénticos tests (imanes Stern-Gerlach) a los dos miembros de un par, tenemos que admitir que el apareamiento se generaliza a la Bertlmann, si uno tiene capacidad de pasar un cierto test, el otro no. Entonces el aserto anterior sobre pares es equivalente a éste sobre cada miembro:





$$(la\ probabilidad\ de\ ser\ capaz\ de\ pasar\ a\ 0^0\ y\ no\ serlo\ \ a\ 45^0)$$
$$+$$
$$(la\ probabilidad\ de\ ser\ capaz\ de\ pasar\ a 45^0 y\ no\ serloa\ 90^0)$$
$$\geq$$
$$(la\ probabilidad\ de\ ser\ capaz\ de\ pasar\ a\ 0^0 y\ no\ serlo\ a\ 90^0)$$

Y esto es ciertamente trivial. Porque una partícula capaz de pasar a $0^0$ y no a $90^0$ ( y la cual entonces contribuye a la tercera probabilidad en la desigualdad anterior) es ora capaz de pasar a $45^0$ ( y entonces contribuye a la segunda probabilidad) o incapaz de pasar a $45^0$ (y en tal caso contribuye a la primera probabilidad).

Sin embargo, pese a ser trivial, las probabilidades de la mecánica cuántica no respetan esta desigualdad. La probabilidad cuántica de que una de las partículas atraviese un imán de orientación $a$ y la otra un imán de orientación $b$ (llamada $P(up,up)$ es:

$$P(up,up) = \frac{1}{2}\left(sen\frac{a-b}{2}\right)^2$$

La desigualdad desarrollada anteriormente, cuando se calcula de modo cuántico, nos da:

$$\frac{1}{2}\left(sen(\frac{45}{2})\right)^2 + \frac{1}{2}\left(sen(\frac{45}{2})\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(sen(\frac{90}{2})\right)^2$$

$$0{,}1464 \geq 0.2500$$

Lo cual no es verdadero.





Resumamos una vez más la lógica que conduce al callejón sin salida. Las correlaciones EPRB son tales que el resultado del experimento en un lado predice el del otro, siempre que los analizadores estén paralelos. Si no aceptamos la intervención de un lado como una influencia causal sobre el otro, nos vemos obligados a admitir que los resultados en ambos lados están en cualquier caso determinados de antemano, independientemente de la intervención en el lado opuesto, por señales desde la fuente y por la disposición local de los imanes. Pero esto tiene implicaciones para disposiciones no paralelas que están en conflicto con los de la mecánica cuántica. Por consiguiente no podemos descartar la intervención de uno de los lados como una influencia causal sobre el otro.



«EL ENTRELAZAMIENTO NO ES UN SINO EL RASGO CARACTERÍSTICO DE LA MECÁNICA CUÁNTICA*»

Erwin Schrödinger

*Schrödinger, E. (1935, October). Discussion of probability relations between separated systems. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (Vol. 31, No. 04, pp. 555-563). Cambridge University Press.


Doctor
say Bell
we con
nected

«Nuestro amor es eterno y nos une más allá de toda distancia», no parece una frase típica de las utilizadas en estos posteos. Nos resulta mucho más familiar la expresión: un observador A orienta su detector con un ángulo $\alpha$, mientras que un observador B, lo hace con un ángulo $\beta$.

En artículos relacionados con experimentos sobre la desigualdad de Bell, criptografía o teleportación, es usual utilizar la expresión Alicia envía una señal a Bob, en vez de utilizar un observador A envía una señal a un observador B.

La «pareja cuántica» fue inventada por Ronald Rivest en 1978 [*A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems*. Ronald L. Rivest, Adi Shamir, and Leonard M. Adleman. *CACM* **21**,2 (1978) pp. 120-126].

La relación de Alicia y Bob es un «amor entrelazado». «Alicia, no importa la distancia ni el tiempo, cierra los ojos y piensa en mí e instantemente lo sabré, nuestros corazones laten al unísono» podría decir Bob sin caer en la cursilería.

Ahora imaginemos la siguiente situación: Alicia y Bob se encuentran felizmente casados. Mientras Alicia se encuentra lejos, en un viaje de negocios, Bob conoce a Carla que está casada con Darío quien se encuentra lejos de casa atendiendo sus negocios inmobiliarios. Bob y Carla terminan «entrelazándose», olvidan sus respectivas parejas y deciden formar una pareja estable. Misteriosamente, Alicia y Darío, que nunca se han visto también llegan a estar entrelazados. De repente, se comportan como un matrimonio sin tan siquiera conocerse.

Si sustituimos a las personas de esta historia por las partículas A, B,C y D, el extraño fenómeno anterior sucede realmente Si las partículas A y B están entrelazadas, y asimismo lo están C y D, entonces podemos entrelazar las partículas separadas A y D pasando B y C a través de un aparato qua a su vez las entrelace.
En la figura que ilustra este posteo, en la radio suena el Blues del Teorema de Bell, una canción compuesta por Nick Herbert cuya letra dice:

Doctor Bell say we connected
He call me on the phone
Doctor Bell say united
He call me on the phone
But if we really together, baby
How come I feel so all alone?

It's so easy to forget you
Last night I did it fifty times
And I never think about you
Except from nine to nine
Since we got tangled up in quantum honey
Can't get that sweet thing off my mind.

On the dance floor, in the kitchen
We each move separately
But Bell prove we united
Down in deep reality
How did that quantum magic happen?
One of Mother Nature's mysteries.

Doctor Bell say we connected
He call me on the phone
Doctor Bell say united
He call me on the phone
But if we really together, baby
How come I feel so all alone?

En los comentarios se incluye un enlace con la interpretación del Blues del Teorema de Bell realizada por: Joy Rush(voz), Jack Bowers (piano) y George Galt (harmonica).

# ¿Me estás diciendo que esto puede tener un uso práctico?

Preguntó asombrado J. S. Bell a Artur Ekert, creador de la criptografía cuántica. Ekert contestó que sí, que creía que sí, a lo que Bell respondió: vaya, es increíble*.

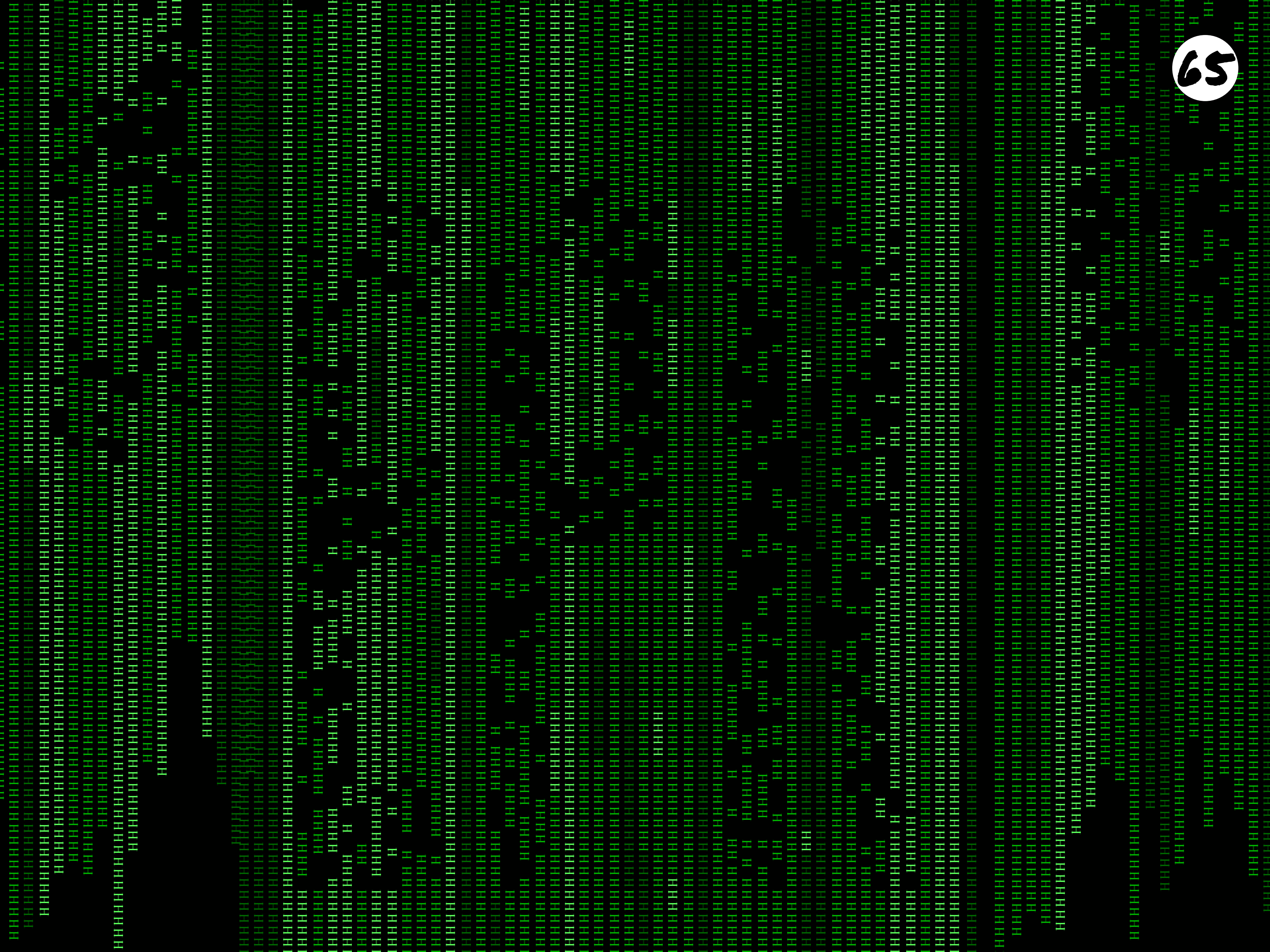
*Gilders, Louise, The age of entanglement, Ed. Knopf, 2008 pp 314-315.

Todo ocurrió en Oxford, al final de los ochenta y principio de los noventa, nos cuenta Ekert*, no recuerdo exactamente lo que me impulsó a visitar la Biblioteca del Clarendon Laboratory un cierto día lluvioso, rebuscar en las estanterías polvorientas y tomar el artículo original de Einstein, Podolsky y Rosen. Sí recuerdo que una frase del artículo atrajo mi atención: «Si, sin perturbar de ningún modo un sistema, podemos predecir con seguridad el valor de una cantidad física, entonces existe un elemento de realidad física correspondiente a dicha cantidad». ¡Era la definición del espionaje perfecto! Supongo que tuve la suerte de leer el artículo desde esa perspectiva particular. El resto consistió en reescribir el asunto en términos criptográficos.

Lo que quiere el espía es conocer el mensaje «sin perturbar de ningún modo el sistema». Si el criptomensaje muestra trazas de haber sido espiado, entonces su destinatario no lo utilizará y el trabajo del espía habrá sido en vano. Un código entrelazado será un código no espiable. Si se viola la desigualdad de Bell (lo que significa que siguen entrelazados), entonces no es posible que el espía haya tocado las partículas en su tránsito. Cualquier espionaje destruiría el entrelazamiento. La desigualdad de Bell es como la firma de que no se han tocado las partículas.

En 1991, con la ayuda de Rarity y Tapster, Ekert hizo realidad la criptografía cuántica experimental basada en el entrelazamiento cuántico. La «acción fantasma a distancia» de Einstein encontraba su primera aplicación práctica, había comenzado la era de la información cuántica. La mecánica cuántica no sólo era distinta de la física clásica, también abría nuevas posibilidades de procesar la información.

*Ekert A. Cracking Codes II, +plus magazine(virtual), issue **35** (2005).



¿Qué significa el entrelazamiento? ¿Qué nos dice acerca del mundo y acerca de la naturaleza del espacio tiempo? Estas son probablemente las preguntas más difíciles de responder de toda la física.

El entrelazamiento destroza todas nuestras concepciones acerca del mundo desarrolladas a través de nuestra experiencia sensorial. Tales nociones de la realidad están tan arraigadas en nuestra mente que incluso el mayor físico del siglo XX, Albert Einstein, fue inducido por esas nociones cotidianas al error de creer que la mecánica cuántica era «incompleta». Einstein creía que lo que sucede en un lugar no podía estar ligado directa e instantáneamente con lo que sucede en un lugar diferente. El entrelazamiento nos enseña que la experiencia cotidiana no nos equipa con la capacidad de comprender lo que sucede a escala microscópica.

Pero el entrelazamiento es aún más espectacular , pues destruye nuestra noción de que la separación espacial tiene sentido. Dos partícula que pueden estar separadas kilómetros o años luz, pueden comportase de manera coordinada: lo que le sucede a una de ellas le sucede instantáneamente a la otra, sin importar la distancia entre ambas.

Esta última definición parece ir en contra de la relatividad, al señalar que lo que le sucede a una de las partículas instantáneamente le sucederá a la otra, sin embargo este fenómeno no permite enviar un mensaje más rápido que la velocidad de la luz. Lo cual constituye una distinción importante que refleja la naturaleza de los fenómenos cuánticos, una naturaleza puramente aleatoria.

Cuando medimos, obligamos a algún sistema cuántico a «escoger» un valor real. Así cuando Alicia mide el espín de su partícula a lo largo de una dirección que ella escoge, no puede escoger el resultado. El resultado será «arriba» o «abajo», pero Alicia no puede predecir cuál de ellos será. Una vez que Alicia mide, la partícula de Bob pasa forzosamente a un estado determinado, espín opuesto al resultado de Alicia. Pero Alicia no tiene control alguno sobre los resultados que obtiene, no le es posible enviar ninguna información con sentido a Bob.

Solo después de comparar sus resultados, utilizando un método convencional de información, pueden Alicia y Bob ver la coincidencia de los resultados. La ilustración de este posteo está inspirada en un ejemplo que utilizaba John Bell para clarificar esta cuestión. En los comentarios se adjunta un link con un fragmento de una conferencia dictada por Bell en 1990. La idea es equivalente a la presentada con las mediciones realizadas por Alicia y Bob.

Como vemos, el entrelazamiento es un fenómeno que desafía todas nuestras nociones cotidianas, y existe un fenómeno aún más espectacular asociado al entrelazamiento, la teleportación.

La teleportación cuántica es un modo de transferir el estado de una partícula a una segunda partícula, que puede encontrarse muy lejos, «teleportando» efectivamente la partícula a otro lugar. El primer experimento sobre teleportación fue realizado en 1997 por el equipo científico de Zeilinger utilizando fotones. Los interesados pueden consultar el artículo publicado en la revista *Nature*, [Bouwmeester, D., Pan, J. W., Mattle, K., Eibl, M., Weinfurter, H., & Zeilinger, A. (1997). Experimental quantum teleportation. Nature, 390(6660), 575-579].

Dpto. Física-UNS. Av. Alem 1253
Bahía Blanca. Bs.As.

www.fisica.uns.edu.ar

Departamento de Física-UNS

Ediciones
Bob and Trash