

**9. Ueber das Gesetz  
der Energieverteilung im Normalspectrum;  
von Max Planck.**

(In anderer Form mitgeteilt in der Deutschen Physikalischen Gesellschaft,  
Sitzung vom 19. October und vom 14. December 1900, Verhandlungen  
2. p. 202 und p. 237. 1900.)

**Einleitung.**

Die neueren Spectralmessungen von O. Lummer und E. Pringsheim<sup>1)</sup> und noch auffälliger diejenigen von H. Rubens und F. Kurlbaum<sup>2)</sup>, welche zugleich ein früher von H. Beckmann<sup>3)</sup> erhaltenes Resultat bestätigten, haben gezeigt, dass das zuerst von W. Wien aus molecularkinetischen Betrachtungen und später von mir aus der Theorie der elektromagnetischen Strahlung abgeleitete Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum keine allgemeine Gültigkeit besitzt.

Die Theorie bedarf also in jedem Falle einer Verbesserung, und ich will im Folgenden den Versuch machen, eine solche auf der Grundlage der von mir entwickelten Theorie der elektromagnetischen Strahlung durchzuführen. Dazu wird es vor allem nötig sein, in der Reihe der Schlussfolgerungen, welche zum Wien'schen Energieverteilungsgesetz führten, dasjenige Glied ausfindig zu machen, welches einer Abänderung fähig ist; sodann aber wird es sich darum handeln, dieses Glied aus der Reihe zu entfernen und einen geeigneten Ersatz dafür zu schaffen.

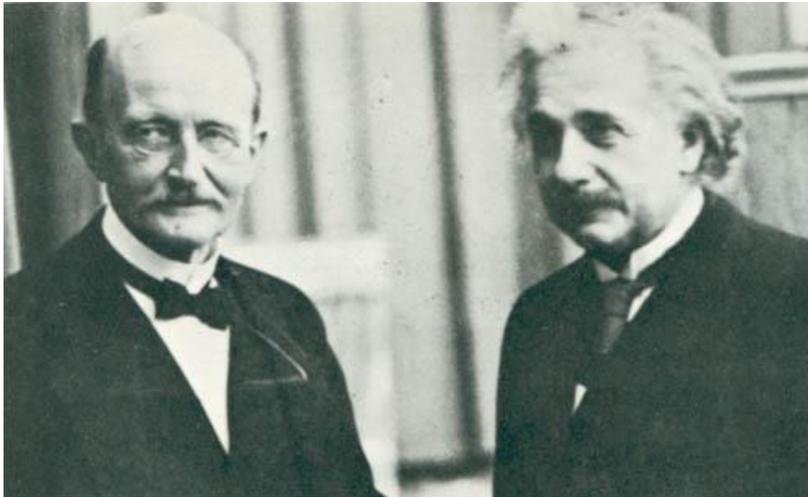
Dass die physikalischen Grundlagen der elektromagnetischen Strahlungstheorie, einschliesslich der Hypothese der „natürlichen Strahlung“, auch einer geschärften Kritik gegenüber Stand halten, habe ich in meinem letzten Aufsatz<sup>4)</sup> über diesen

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. der Deutsch. Physikal. Gesellsch. 2. p. 163. 1900.

2) H. Rubens und F. Kurlbaum, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin vom 25. October 1900, p. 929.

3) H. Beckmann, Inaug.-Dissertation, Tübingen 1898. Vgl. auch H. Rubens, Wied. Ann. 69. p. 582. 1899.

4) M. Planck, Ann. d. Phys. 1. p. 719. 1900.



# SOBRE LA LEY DE DISTRIBUCIÓN DE LA ENERGÍA EN EL ESPECTRO NORMAL



MAX PLANCK\*

Las recientes medidas espectrales realizadas por O. Lummer y E. Pringsheim<sup>1</sup>, y las aún más notables realizadas por H. Rubens y F. Kurlbaum<sup>2</sup>, que en conjunto confirmaban un resultado obtenido anteriormente por H. Beckmann<sup>3</sup> muestran que la ley de distribución de la energía en el espectro normal, deducida por primera vez por W. Wien a partir de consideraciones cinético-moleculares y posteriormente por mi a partir de la teoría de la radiación electromagnética, no es válida en general. En cualquier caso la teoría requiere una corrección, y en lo que sigue intentaré hacerla sobre la base de la teoría de la radiación electromagnética que he desarrollado. Para ello será necesario primero encontrar qué término puede cambiarse en el conjunto de condiciones que llevan a la ley de distribución de energía de Wien; entonces será cuestión de eliminar este término del conjunto y hacer una sustitución adecuada del mismo. En mi último artículo<sup>4</sup> demostré que los fundamentos físicos de la teoría de la radiación electromagnética, incluida la hipótesis de «radiación natural», resisten la crítica más severa; y puesto que hasta

donde yo sé no hay errores en los cálculos, sigue siendo válido el principio de que la ley de distribución de la energía en el espectro normal está completamente determinada cuando se consigue calcular la entropía  $S$  de un resonador vibrante, monocromático, irradiado, como función de su energía vibracional  $U$ . Puesto que entonces se obtiene, a partir de la relación  $dS/dU = 1/\theta$ , la dependencia de la energía  $U$  respecto de la temperatura  $B$ , y puesto que la energía también está relacionada con la densidad de radiación a la frecuencia correspondiente por una relación sencilla<sup>5</sup>, se obtiene también la dependencia de esta densidad de radiación respecto de la temperatura. La distribución de energía normal es entonces aquella en que las Densidades de radiación de todas las frecuencias diferentes tienen la misma temperatura.

En consecuencia, todo el problema se reduce a determinar  $S$  como una función de  $U$ , y es a esta tarea a la que se dedica la parte más esencial de lo que sigue. En mi primer tratamiento de este tema yo había expresado  $S$ , por definición, como una simple función de  $U$  sin más fundamento, y me contenté con demostrar que esta forma de entropía satisface todos los requisitos que le impone la termodinámica. Entonces yo creía que esta era la única expresión posible y que en consecuencia la ley de Wien, que se sigue de ella, necesariamente tenía validez general. Sin embargo, en un análisis posterior más detallado<sup>6</sup> me pareció que debe haber otras expresiones que dan el mismo resultado, y que en cualquier caso se necesita otra condición para poder calcular  $S$  unívocamente. Creí haber encontrado tal condición en el siguiente principio, que entonces me parecía perfectamente plausible: dado un sistema, cerca del equilibrio térmico, compuesto por  $N$  resonadores en el mismo campo de radiación estacionario, el incremento en la entropía total  $S_N = NS$  asociado a un cambio irreversible infinitamente pequeño depende solo de su energía total  $U_N = UN$  y los cambios en esta cantidad, pero no de la energía  $U$  de los resonadores individuales. Este teorema lleva de nuevo a la ley de distribución de energía de Wien. Pero puesto que la última no está confirmada por la experiencia, uno se ve obligado a concluir que tampoco este

\* «On the Law of Distribution of Energy in the Normal Spectrum», publicado inicialmente en *Annalen der Physik*, vol. 4 (1901), pp. 553 ss.

1. O. Lummer y E. Pringsheim, *Verh. Deutsch. Phys. Ges.*, 2 (1900), p. 163.

2. H. Rubens y F. Kurlbaum, *PA W.' Sitzungsberichte*, 25 de octubre, 1900, p. 929.

3. H. Beckmann, *Inaugural dissertation*, Tubinga, 1898. Véase también I-I. Rubens, *Weid. Ann.*, 69 (1899), p. 582.

4. M. Planck, *Ann. d. Phys.*, I (1900), p. 719.

5. Comparar con la ecuación (8).

6. M. Planck, *loc. cit.*, pp. 730 ss.

principio puede ser válido en general y por ello debe ser eliminado de la teoría<sup>7</sup>.

Así pues, ahora debe introducirse otra condición que permita el cálculo de  $S$ , y para conseguirlo es necesario examinar con más profundidad el significado del concepto de entropía. La consideración de la insostenibilidad de la hipótesis hecha anteriormente ayudará a orientar nuestras ideas en la dirección indicada por la discusión anterior. En lo que sigue se describirá un método que da una nueva y más sencilla expresión para la entropía y con ello proporciona también una nueva ecuación de radiación que no parece estar en conflicto con ningún hecho hasta ahora determinado.

### 1. CÁLCULOS DE LA ENTROPÍA DE UN RESONADOR COMO FUNCIÓN DE SU ENERGÍA

1. La entropía depende del desorden y este desorden, de acuerdo con la teoría de la radiación electromagnética para las vibraciones monocromáticas de un resonador situado en un campo de radiación estacionario, depende de la irregularidad con la que cambian constantemente su amplitud y su fase, siempre que se consideren intervalos de tiempo largos comparados con el periodo de vibración pero pequeños comparados con la duración de una medida. Si tanto la amplitud como la fase permanecieran absolutamente constantes, lo que significa vibraciones completamente homogéneas, no podría existir entropía y la energía vibracional tendría que estar completamente libre para convertirse en trabajo. Por consiguiente, la energía constante  $U$  de un único resonador vibrante estacionario debe tomarse como un promedio temporal o, lo que es lo mismo, como un promedio simultáneo de las energías de un gran número  $N$  de resonadores idénticos, situados en el mismo campo de radiación estacionario y suficientemente separados para que no puedan influir unos en otros directamente. En este sentido es en el que nos referiremos a la energía promedio  $U$  de un único resonador. Entonces, a la energía total

$$U_N = UN$$

de dicho sistema de  $N$  resonadores corresponde una cierta entropía total

$$S_N = NS$$

del mismo sistema, donde  $S$  representa la entropía media de un único resonador y la entropía  $S_N$  depende del desorden con el que la energía total  $U_N$  está distribuida entre los resonadores individuales.

2. Ahora hacemos la entropía  $S_N$  del sistema proporcional al logaritmo de su probabilidad  $W$ , salvo una constante aditiva arbitraria, de modo que los  $N$  resonadores en conjunto tienen la entropía  $S_N$ :

$$S_N = k \log(W) + \text{constante}$$

En mi opinión esto sirve realmente como una definición de la probabilidad  $W$ , puesto que en las hipótesis básicas de la teoría electromagnética no hay una prueba definida para semejante probabilidad. La adecuación de esta expresión es evidente de entrada, a la vista de su simplicidad y estrecha relación con un teorema de la teoría cinética de los gases<sup>8</sup>.

3. Ahora se trata de encontrar la probabilidad  $W$  de modo que los  $N$  resonadores juntos posean la energía vibracional  $U_N$ . Además es necesario interpretar  $U_N$  no como una cantidad continua, infinitamente divisible, sino como una cantidad discreta compuesta de un número entero de partes finitas iguales. Llamemos a cada una de estas partes el elemento de energía  $\varepsilon$ ; en consecuencia debemos poner

$$U_N = P\varepsilon$$

donde  $P$  representa en general un entero grande, mientras que el valor de  $\varepsilon$  es todavía incierto. a .

Ahora es evidente que cualquier distribución de los  $P$  elementos de energía entre los  $N$  resonadores solo puede dar como resultado un número definido, entero y finito. Llamamos a cada una de estas for-

7. Además habría que comparar las críticas hechas previamente a este teorema por W. Wien (Report of the Paris Congress, 2, 1900, p. 40) y por O. Lummer (loc.cit, 1900. p. 92).

8. L.Boltzmann. Wiener Ber, (II) 76 (1877), p. 428.

mas de distribución, siguiendo una expresión utilizada por L. Boltzmann para una idea similar, una «compleción». Si se denotan los resonadores por los números 1, 2, 3, ...,  $N$ , y se escriben uno al lado de otro, y si bajo cada resonador se pone el número de elementos de energía asignados al mismo por alguna distribución arbitraria, entonces se obtiene para cada compleción individual una pauta de la forma siguiente

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	38	11	0	9	2	20	4	4	5

Aquí suponemos  $N = 10, P = 100$ . El número  $R$  de todas las compleciones posibles es obviamente igual al número de disposiciones que se pueden obtener de este modo para la fila inferior, para  $N$  y  $P$  dados. Por claridad deberíamos señalar que dos compleciones deben considerarse diferentes si las correspondientes series de números contienen los mismos números pero en un orden diferente.

De la teoría combinatoria se obtiene que el número de compleciones posibles es:

$$R = \frac{N(N+1)(N+2) \dots (N+P-1)}{1.2.3 \dots P} = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)!P!}$$

Ahora, según el teorema de Stirling, tenemos en primera aproximación

$$N! \approx N^N e^{-N}$$

En consecuencia, la aproximación correspondiente es

$$R \approx \frac{(N+P)^{N+P}}{N^N P^P}$$

4. La hipótesis que queremos establecer como base para cálculos posteriores reza lo siguiente: para que los  $N$  resonadores posean colectivamente la energía vibracional  $U_N$ , la probabilidad  $W$  debe ser proporcional al número  $R$  de todas las compleciones posibles formadas

por distribución de la energía  $U_N$  entre los  $N$  resonadores; o en otras palabras, cualquier compleción dada es tan probable como cualquier otra. Que esto ocurra realmente en la naturaleza solo se puede probar, en última instancia, por la experiencia. Pero si la experiencia decidiera finalmente a su favor, sería posible extraer más conclusiones de la validez de esta hipótesis sobre la naturaleza particular de las vibraciones de los resonadores; a saber, en la interpretación propuesta por J. V. Kries<sup>9</sup> con respecto al carácter de las «amplitudes originales, comparables en magnitud pero independientes unas de otras». Tal como están las cosas, desarrollos adicionales a lo largo de estas líneas parecen prematuros.

5. De acuerdo con la hipótesis introducida en relación con la ecuación (3), la entropía del sistema de resonadores en consideración es, tras la determinación adecuada de la constante aditiva:

$$S_N = k \log(R) = k \{ (N+P) \log(N+P) - N \log(N) - P \log(P) \}$$

y considerando (4) y (1):

$$S^N = kN \left\{ \left(1 + \frac{U}{\varepsilon}\right) \log \left(1 + \frac{U}{\varepsilon}\right) - \frac{U}{\varepsilon} \log \left(\frac{U}{\varepsilon}\right) \right\}$$

Así pues, de acuerdo con la ecuación (2) la entropía  $S$  de un resonador como función de su energía  $U$  está dada por:

$$S = k \left\{ \left(1 + \frac{U}{\varepsilon}\right) \log \left(1 + \frac{U}{\varepsilon}\right) - \frac{U}{\varepsilon} \log \left(\frac{U}{\varepsilon}\right) \right\}$$

## II. INTRODUCCIÓN n12 LA LEY DE DESPLAZAMIENTO DE WIEN

6. Después del teorema de Kirchoff de la proporcionalidad entre las

9. J. V. Kries, The Principles of Probabilint Calculation (Friburgo, 1886), p.36.

potencias de emisión y absorción, la denominada ley de desplazamiento conocida por el nombre de su descubridor W. Wien<sup>10</sup>, que incluye como caso especial la ley de Stefan-Boltzmann de dependencia de la radiación total con respecto a la temperatura, proporciona la contribución más valiosa a los firmemente establecidos fundamentos de la teoría de la radiación. En la forma dada por M. Thiesen<sup>11</sup> se lee como sigue:

$$E \cdot d\lambda = \theta^5 \psi(\lambda\theta) \cdot d\lambda$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda,  $E \cdot d\lambda$  representa la densidad de volumen de la radiación de «cuerpo negro<sup>12</sup> dentro de la región espectral entre  $\lambda$  y  $\lambda + d\lambda$ ,  $\theta$  representa la temperatura y  $\psi(x)$  representa una cierta función de un único argumento  $x$ .

7. Ahora queremos examinar lo que afirma la ley de desplazamiento de Wien sobre la dependencia de la entropía  $S$  de nuestro resonador respecto de su energía  $U$  y su periodo característico, especialmente en el caso general en donde el resonador está situado en un medio diatermano ordinario. Para ello generalizamos a continuación la forma de Thiesen de la ley de radiación en un medio diatermano con velocidad de la luz  $c$ . Puesto que no tenemos que considerar la radiación total, sino solo la radiación monocromática, se hace necesario para comparar diferentes medios diatermanos introducir la frecuencia  $\nu$  en lugar de la longitud de onda  $\lambda$ .

Así pues, denotemos por  $u d\nu$  la densidad de volumen de energía radiante que pertenece a la región espectral entre  $\nu$  y  $\nu + d\nu$  entonces escribimos:  $u d\nu$  en lugar de  $E d\lambda$ ,  $c/\nu$  en lugar de  $\lambda$ , y  $c d\nu/\nu^2$  en lugar de  $d\lambda$  De lo que obtenemos

$$u = \theta^5 \frac{c}{\nu^2} \psi\left(\frac{c\theta}{\nu}\right)$$

10. W. Wien, Proceedings of the Imperial Academy of Science, Berlín, 9 de febrero, 1893, p. 55.

11. M. Thiesen, Verh. Deutsch. Phys. Ges., 2 (1900), p. 66.

12. Quizá habría que hablar más apropiadamente de radiación «blanca», para generalizar lo que ya se entiende por luz blanca total.

Ahora, según la bien conocida ley de Kirchoof-Clausius, la energía emitida por unidad de tiempo con frecuencia  $\nu$  y a temperatura  $\theta$  desde una superficie negra en un medio diatermano es inversamente proporcional al cuadrado de la velocidad de propagación  $c^2$ ; entonces la densidad de energía  $U$  es inversamente proporcional a  $c^3$  y tenemos:

$$u = \frac{\theta^5}{\nu^2 c^3} f\left(\frac{\theta}{\nu}\right)$$

donde las constantes asociadas con la función  $f$  son independientes de  $c$ . En lugar de esto, si  $f$  representa una nueva función de un único argumento, podemos escribir:

$$u = \frac{\nu^3}{c^3} f\left(\frac{\theta}{\nu}\right)$$

y de esto vemos, entre otras cosas, que como es bien conocido, la energía radiante  $u\lambda^3$  a una temperatura y frecuencia dadas es la misma para todos los medios diatermanos.

8. Para ir de la densidad de energía  $u$  a la energía  $U$  de un resonador estacionario situado en el campo de radiación y que vibra con la misma frecuencia  $\nu$ , utilizamos la relación que se expresa en la ecuación (34) de mi artículo sobre procesos de radiación irreversibles<sup>13</sup>

$$K = \frac{\nu^2}{c^2} U$$

( $K$  es la intensidad de un rayo monocromático linealmente polarizado), que junto con la bien conocida ecuación:

$$u = \frac{8\pi K}{c}$$

da la relación:

13. Planck, Ann. d. Phys., 1 (1.900), p. 99.

$$u = \frac{8\pi v^2}{c^3} U$$

De esto y de la ecuación (7) se sigue:

$$U = u f\left(\frac{U}{v}\right)$$

en donde ya no aparece  $c$ . En lugar de esto podemos escribir

$$\theta = v f\left(\frac{U}{v}\right)$$

9. Finalmente, introducimos la entropía  $S$  del resonador haciendo

$$\frac{1}{\theta} = \frac{dS}{dU}$$

Entonces obtenemos:

$$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{v} f\left(\frac{U}{v}\right)$$

e integrado:

$$S = f\left(\frac{U}{v}\right)$$

es decir, la entropía de un resonador que vibra en un medio diatermano arbitrario depende solo de la variable  $U/v$  aparte de esta solo contiene constantes universales. Esta es la forma más sencilla que conozco de la ley de desplazamiento de Wien.

10. Si aplicamos la ley de desplazamiento de Wien en la última forma a la ecuación (6) para la entropía  $S$ , entonces encontramos que el elemento de energía  $\varepsilon$  debe ser proporcional a la frecuencia  $\nu$  y así:

$$\varepsilon = h\nu$$

y en consecuencia:

$$S = k \left\{ \left(1 + \frac{U}{h\nu}\right) \log \left(1 + \frac{U}{h\nu}\right) - \frac{U}{h\nu} \log \left(\frac{U}{h\nu}\right) \right\}$$

Aquí  $h$  y  $k$  son constantes universales.

Sustituyendo en la ecuación (9) se obtiene:

$$\frac{1}{\theta} = \frac{k}{h\nu} \log \left(1 + \frac{h\nu}{U}\right)$$

$$U = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k\theta) - 1}$$

y de la ecuación (8) se sigue entonces la ley de distribución de energía buscada:

$$u = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{\exp(h\nu/k\theta) - 1}$$

o introduciendo las sustituciones dadas en 7, en términos de la longitud de onda  $\lambda$  en lugar de la frecuencia:

$$E = \frac{8\pi ch}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp(ch/k\theta) - 1}$$

Tengo el proyecto de derivar en otro lugar las expresiones para la intensidad y la entropía de la radiación que se propaga en un medio diatermano, así como el teorema para el incremento de entropía en procesos de radiación no estacionarios.

### III. VALORES NUMÉRICOS

11. Los valores de ambas constantes universales  $h$  y  $k$  pueden calcularse de forma bastante precisa con la ayuda de las medidas disponi-

bles. F. Kurlbaum<sup>14</sup>, que designa por  $S_t$ , la energía total radiada al aire en 1 segundo desde 1 centímetro cuadrado de un cuerpo negro a temperatura  $t^\circ\text{C}$ , encontró que:

$$S_{100} - S_0 = \frac{0,0731W}{\text{cm}^2} = \frac{7,31 \times 10^5 \text{erg}}{\text{cm}^2} \cdot s$$

De esto se puede obtener la densidad de energía de la radiación total en aire a la temperatura absoluta 1:

$$\frac{4,731 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^{10}(373^4 - 273^4)} = 7,06 \cdot 10^{-15} \text{erg}/(\text{cm}^3 \cdot \text{grado}^4)$$

Por otra parte, de acuerdo con la ecuación (12) la densidad energía de la energía radiante total para  $\theta = 1$  es

$$u^* = \int_0^\infty u dv = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{v^3}{\exp(hv/k\theta) - 1} dv = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty v^3 (\exp(-hv/k\theta) + \exp(-2hv/k\theta) + \exp(-3hv/k\theta) + \dots) dv$$

que integrado término a término da

$$u^* = \frac{8\pi h}{c^3} 6 \left(\frac{k}{h}\right)^4 \left(1 + \frac{1}{24} + \frac{1}{34} + \frac{1}{44} + \dots\right)$$

Si hacemos esto igual a  $7,061 \cdot 10^{-15}$  entonces, puesto que  $c = 3 \cdot 10^{10}$  cm/s, obtenemos:

$$\frac{k^4}{h^3} = 1,1682 \cdot 10^{15}$$

14. F. Kurlbaum, Wind. Ann, 65 (1898), p. 759.

12. O. Lummer y E. Pringsheim<sup>15</sup> determinaron que el producto  $\lambda_m \theta$ , donde  $\lambda_m$  es la longitud de onda de máxima energía en aire a temperatura  $\theta$ , es 2.940 micrones-grado. Así, en medida absoluta:

$$\lambda_m = 0,294 \text{cm} \cdot \text{grado}$$

Por otra parte, se sigue de la ecuación (13), cuando se hace la derivada de  $E$  con respecto a  $\theta$  igual a cero para hallar  $\lambda = \lambda_m$

$$\left(1 - \frac{ch}{5k\lambda_m\theta}\right) \exp(ch/k\lambda_m\theta) = 1$$

y de esta ecuación trascendente

$$\lambda_m \theta = ch/4,9651k$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} h/k &= (4,9561 \cdot 0,294) 3 \cdot 10^{10} \\ &= 4,866 \cdot 10^{-11} \end{aligned}$$

De esto y de la ecuación (14) resultan los valores para las constantes universales:

$$\begin{aligned} h &= 6,55 \cdot 10^{-27} \text{erg} \cdot s \\ k &= 1,246 \cdot 10^{-16} \text{erg}/\text{grado} \end{aligned}$$

Estos son los mismos números que indiqué en mi anterior comunicación.

15. O. Lummer y E. Pringaheim, Verch. Deutsch. Phys. Ges, 2 (1900). p.176.

