Nombre: Mecánica Estadística 2019

19 de julio de 2019

Examen Final

1- En 1907 Einstein demostró que la fórmula de cuerpo negro podía deducirse a partir de considerar a los átomos que constituyen las paredes como un sistema de dos niveles A, B, en equilibrio térmico, donde el número de átomos en cada nivel es:

$$N_A = A_{AB} + B_{AB}\rho(\omega_{BA})$$

$$N_B = B_{BA}\rho(\omega_{BA})$$

a- Describa las condiciones de equilibrio.

b- Deduzca la ecuación de cuerpo negro en función de los coeficientes A_{AB},B_{AB},B_{BA}.

c- Obtenga la expresión de dichos coeficientes.

2- Considere un gas ideal en un recipiente d dimensional. La energía de cada partícula es $\varepsilon_p = \alpha|p|^s$ con $\alpha > 0$ y $s > 0$. Muestre que la energía interna del gas U y la presión p están relacionados a través de la expresión $pV = \sigma U$ Determine σ para un gas clásico, un gas de bosones y un gas de fermiones.

3- Describa el fenómeno de condensación de Bose-Einstein.

a- Considere un gas de bosones inmerso en un campo gravitatorio, con cte. gravitatoria g y muestre que la temperatura crítica es:

$$T_c \approx T_c^0 \left[1 + \frac{8}{9}\frac{1}{\zeta(3/2)}\left(\frac{\pi mgL}{kT_c^0}\right)^{1/2}\right]$$

donde, L es la altura del recipiente, $mgL \ll kT_c^0$ y $\zeta(\nu)$ la función zeta de Riemann.

4- Recientemente se ha observado el efecto Barnett nuclear (PRL 122-177202). El experimento consiste en hacer girar una muestra de agua a velocidades de rotación de hasta 13.5 kHz en un campo magnético débil. Se observa una relación lineal de la magnetización generada por la orientación de los espines de los protones, en función de la velocidad de rotación.

a- Considere un objeto con momento de inercia I, rotando con una velocidad ω. Si el momento angular varia ΔL , entonces la energía cambia $\Delta E = \omega\Delta L$. Por conservación de momento angular total $\Delta L + \Delta S = 0$, el cambio en el espín se transforma en un cambio en energía. Obtenga el cociente de probabilidades de la configuración paralela y perpendicular a la dirección del campo.

b- Muestre que bajo las aproximaciones apropiadas, la magnetización M es linealmente proporcional a la velocidad ω.

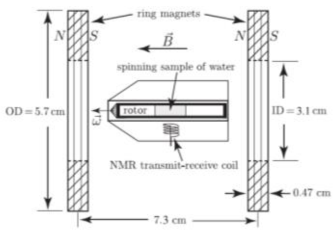

FIG. 1. Diagram of the experiment. Outer diameter (OD); inner diameter (ID).

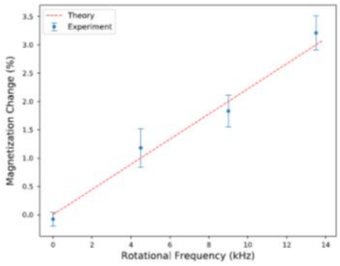

FIG. 2. Signal change vs rotation.

5- Describa los conceptos de nucleación y crecimiento y descomposición spinodal.

Solución

Problema 1

Sea:

$$\frac{N_a}{N_b} = exp[-(E_a - E_b)/kT] = exp[\hbar\omega_{ba}/kT]$$

entonces:

$$\rho(\omega_{ba}) = \frac{A_{ab}}{B_{ba}\big(exp(\hbar\omega_{ba}/kT)\big) - B_{ab}}$$

comparando con la fórmula de Planck, obtenemos:

$$B_{ab} = B_{ba}$$

$$A_{ab} = \frac{\hbar\omega_{ba}^3}{\pi^2 c^2} B_{ab}$$

Problema 2

$$pV = kTln(Z) = \frac{1}{a}\int_0^\infty d\varepsilon g(\varepsilon) ln\big(1 + ae^{-\beta(\varepsilon-\mu)}\big)$$

con $a = 0$ partículas clásicas, $a = 1$ fermiones y $a = -1$ bosones.
De manera similar:

$$\langle E\rangle = -\left(\frac{\partial ln(Z)}{\partial\beta}\right) = \int_0^\infty d\varepsilon g(\varepsilon)\varepsilon\frac{1}{exp(\varepsilon - \mu) + a}$$

en ambos casos $g(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\frac{d}{s}-1}$
finalmente:

$$pV = \sigma\langle E\rangle$$

$\sigma = s/d$ para todas las estadísticas.

Problema 3

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgh = \varepsilon + mgh$$

con

$$g(\varepsilon, h) = \left(\frac{2\pi A}{\hbar^3}\right)(2m)^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon dh = cA\varepsilon^{1/2} d\varepsilon dh$$

$$\langle N\rangle = cA\int_0^\infty\int_0^l \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon dh}{z^{-1}e^{\beta\varepsilon}e^{\beta mgh} - 1}$$

$$\langle N\rangle = cA(kT)^{3/2}\Gamma(3/2)\int_0^L f_{3/2}\big(ze^{-\beta mgh}\big)dh + N_0$$

condición de condensación $z = 1$ $T \to T_c$

utilizando la condición: $\frac{mgl}{k} \ll T_c^0 \leq T < T_c$

$$\langle N\rangle_c \approx cAl(kT)^{3/2}\Gamma(3/2)\left(\zeta(3/2)-\frac{4}{3}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{mgl}{kT}}\right)$$

Evaluando T_c con $g=0$ y considerando que $\langle N\rangle_{g=0}=\langle N\rangle_{g\neq 0}$

por lo tanto

$$T_c \cong T_c^0\left(1-\frac{4}{3}\frac{1}{\zeta(3/2)}\sqrt{\frac{\pi mgl}{kT_c}}\right)$$

finalmente:

$$T_c \cong T_c^0\left[1+\frac{8}{9}\frac{1}{\zeta(3/2)}\sqrt{\frac{\pi mgl}{kT_c^0}}\right]$$

Problema 4

$$E=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{L^2}{2I}$$

$$\Delta E=\frac{L}{I}\Delta L=\omega\Delta L$$

$$\Delta S+\Delta L=0$$

$$\frac{P_{para}}{P_{antip}}=exp(\Delta E/kT)=exp(\hbar\omega/kT)$$

$$\langle m\rangle=m_0 tanh\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)$$

$$\langle M\rangle=N\langle m\rangle=M_0 tanh\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)$$

con $\hbar\omega\ll kT$

$$\langle M\rangle\propto\omega$$